Chapitre 12

Calcul différentiel

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle non vide et non réduit à un singleton.

12.1 Dérivabilité des fonctions à valeurs réelles

Cette partie prolonge l'étude de la régularité d'une fonction initiée au chapitre *Continuité*. On définit tout d'abord le concept de nombre dérivé et de fonction dérivable puis on présente les principaux théorèmes s'y référant.

12.1.1 Nombre dérivé, fonction dérivée

Définition 1 (Dérivabilité en un point, nombre dérivé)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle I. Soit $a \in I$.
f est dérivable en a si et seulement si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite réelle quand x tend vers a. Dans ce cas, le nombre $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ s'appelle le nombre dérivé de f en a et se note $f'(a)$. Autrement dit,

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Remarques :

- f est dérivable en $a \Longleftrightarrow \exists l \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I\backslash\{a\}, \left(|x-a| \leq \eta \implies \left|\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - l\right| \leq \varepsilon\right)$.

Dans ce cas, $f'(a) = l$.

- En posant $x = a+h$, on obtient une seconde écriture du nombre dérivé de f en a : $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Théorème 2 (f est dérivable en $a \Longleftrightarrow f$ admet un développement limité à l'ordre 1 en a)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle ouvert I. Soit $a \in I$.
f est dérivable en a si et seulement si il existe $l \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$ et une fonction $\varepsilon :]-\eta, \eta[\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ tels que $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$ et :

$$\forall h \in]-\eta, \eta[\backslash\{0\}, f(a+h) = f(a) + hl + h\varepsilon(h).$$

Dans ce cas, $f'(a) = l$ et donc $\forall h \in]-\eta, \eta[\,\backslash\{0\}, f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h)$.

$\star$ Interprétation géométrique : $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction f, notée $\mathcal{C}_f$, au point A de coordonnées $(a, f(a))$. Une équation de cette dernière est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

$\star$ Interprétation cinématique : En physique, a est plutôt noté t (variable désignant le temps) et si on note $x(t)$ la position à l'instant t d'un mobile ayant une trajectoire rectiligne, alors $x'(t)$ désigne la vitesse instantanée de ce mobile à l'instant t.

Le théorème suivant donne une condition nécessaire de dérivabilité d'une fonction en un point.

Théorème 3 (f dérivable en $a \implies f$ continue en a)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle I. Soit $a \in I$.
Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Remarque : Dans la pratique, on se sert de la *contraposée* du résultat précédent : si f est une fonction qui n'est pas continue en a, alors elle n'est a fortiori pas dérivable en a.

Comme lors de l'étude de la continuité, on définit à présent les notions de dérivabilité à gauche et à droite.

Définition 4 (Dérivabilité à gauche, dérivabilité à droite d'une fonction en un point)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle I.
• Soit $a \in I$ tel que a n'est pas la borne gauche de I.
f est dérivable à gauche en a si et seulement si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite réelle *à gauche* quand x tend vers a. Dans ce cas, le nombre $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ s'appelle le nombre dérivé à gauche de f en a et se note $f'_g(a)$. Autrement dit,

$$f'_g(a) = \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

• Soit $a \in I$ tel que a n'est pas la borne droite de I.
f est dérivable à droite en a si et seulement si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite réelle *à droite* quand x tend vers a. Dans ce cas, le nombre $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ s'appelle le nombre dérivé à droite de f en a et se note $f'_d(a)$. Autrement dit,

$$f'_d(a) = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Remarques :
• En posant $x = a + h$, on obtient une seconde écriture des nombres dérivés à gauche et à droite de f en a :

$$f'_g(a) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{et} \quad f'_d(a) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

• On a immédiatement le résultat suivant.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle I. Soit $a \in I$ tel que a n'est pas la borne gauche de I.
Si f est dérivable à gauche en a, alors f est continue à gauche en a.
Ce dernier énoncé peut bien sûr être adapté avec la dérivabilité à droite.

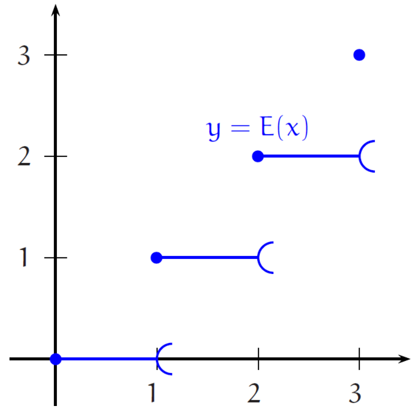
Théorème 5 (Lien entre dérivabilité, dérivabilité à gauche et dérivabilité à droite en un point)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle I. Soit $a \in I$ tel que a n'est pas une borne de I.
f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$. Dans ce cas,

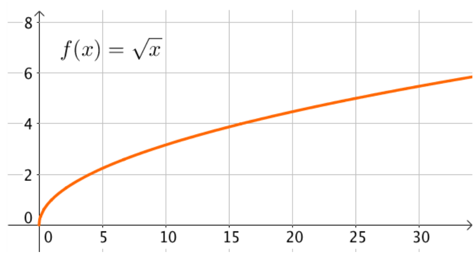
$$f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a).$$

Décrivons les quatre situations de non-dérivabilité en un point.

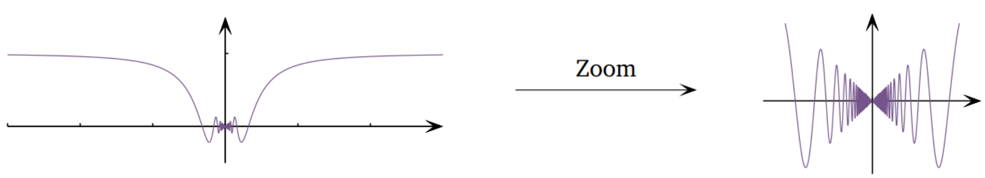
⋆ <u>1^{ier} cas :</u> La fonction f est discontinue en a.
Par exemple, la fonction partie entière n'est dérivable en aucun entier.



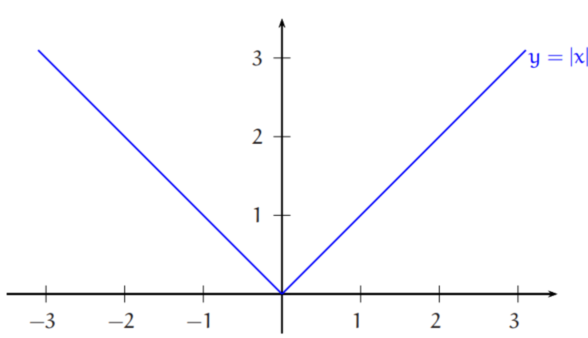
⋆ <u>$2^{\text{ième}}$ cas :</u> La fonction f est continue en a mais son taux d'accroissement en a admet une limite infinie en a. Dans ce cas, $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $x = a$ comme tangente verticale au point de coordonnées $(a, f(a))$.
Par exemple, la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.



⋆ <u>$3^{\text{ième}}$ cas :</u> La fonction f est continue en a mais son taux d'accroissement en a n'admet pas de limite en a car au moins l'une des limites à gauche ou à droite du taux d'accroissement n'existe pas.
Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $f(0) = 0$ n'est pas dérivable en 0.



⋆ <u>$4^{\text{ième}}$ cas :</u> La fonction f est continue en a mais son taux d'accroissement en a n'admet pas de limite en a car ses limites à gauche et à droite existent et diffèrent.
Par exemple, la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0 car son nombre dérivé à gauche en 0 vaut -1 tandis que son nombre dérivé à droite en 0 vaut 1. Sa courbe représentative admet au point de coordonnées $(0, |0|)$ deux demi-tangentes ou encore le point de coordonnées $(0, |0|)$ est un *point anguleux*.



Passons maintenant aux théorèmes opératoires portant sur la dérivabilité d'une fonction en un point.

Théorème 6 (Dérivabilité en un point d'une combinaison linéaire, d'un produit et d'un quotient)

Soient f et g deux fonctions définies sur l'intervalle I et à valeurs réelles. Soit $a \in I$.
• Si f et g sont dérivables en a, alors pour tout $(\lambda, \beta) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda f + \beta g$ est dérivable en a. De plus,

$$\forall (\lambda, \beta) \in \mathbb{R}^2, (\lambda f + \beta g)'(a) = \lambda f'(a) + \beta g'(a).$$

• Si f et g sont dérivables en a, alors la fonction $f \times g$ est dérivable en a. De plus,

$$(f \times g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

• Si f et g sont dérivables en a et si $g(a) \neq 0$, alors la fonction f/g est dérivable en a. De plus,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Remarque : On peut généraliser le second point au cas de $n \geq 2$ fonctions.
Soient $f_1, \ldots, f_n$ n fonctions définies sur l'intervalle I et à valeurs réelles. Soit $a \in I$. Si $f_1, \ldots, f_n$ sont dérivables en $a \in I$, alors $f_1 \times \cdots \times f_n$ est dérivable en a. De plus, $(f_1 \times \cdots \times f_n)'(a) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(a) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} f_i(a)$.
Il ne faut pas retenir cette formule par coeur. Il suffit de se souvenir que la dérivée de $f_1 \times \cdots \times f_n$ est une somme de produits où on dérive d'abord f_1 et on laisse $f_2, \ldots, f_n$ inchangés, puis on dérive f_2 et on laisse $f_1, f_3, \ldots, f_n$ inchangés, ... et on finit en dérivant f_n et en laissant $f_1, \ldots, f_{n-1}$ inchangés.

Théorème 7 (Dérivabilité en un point d'une composée de fonctions)

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur les intervalles I et J et à valeurs réelles. Soit $a \in I$.
On suppose que :
• $f(I) \subset J$,
• f est dérivable en a,
• g est dérivable en $f(a)$.
Alors, la fonction $g \circ f$ est dérivable en a. De plus,

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a)).$$

12.1.2 Fonctions dérivables sur un intervalle

On définit à présent la dérivabilité d'une fonction f définie sur un intervalle I non vide et non réduit à un singleton.

Définition 8 (Dérivabilité et dérivée d'une fonction)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle I.
f est dérivable sur I si et seulement si elle est dérivable en tout point de I. Dans ce cas, la dérivée de f, notée f', est la fonction définie sur I et à valeurs réelles qui à tout $x \in I$ associe $f'(x)$.

Remarque : On peut généraliser la définition précédente à une partie D de $\mathbb{R}$ qui est une réunion finie d'intervalles non vides et non réduits à un singleton de la façon naturelle suivante.
f est dérivable sur D si et seulement si f est dérivable en tout point de D.
Cette définition n'est pas aussi simple qu'il y paraît. Prenons pour D une réunion de deux intervalles I_1 et I_2 : $D = I_1 \cup I_2$. On pourrait croire que f est dérivable sur D si et seulement si f est dérivable sur I_1 et sur I_2. Il n'en

est rien. Prenons par exemple $I_1 = [0,1[$, $I_2 = [1,2[$ et $f : [0,2[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall x \in [0,2[, f(x) = \lfloor x \rfloor$. f est dérivable sur I_1 et dérivable sur I_2. Elle est dérivable à droite en 1 mais n'est pas dérivable à gauche en 1 (elle n'est même pas continue à gauche en 1).
En revanche, si $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, alors une fonction dérivable sur I_1 et sur I_2 est dérivable sur $I_1 \cup I_2$.

Théorème 9 (Opérations sur les fonctions dérivables)

Soient f et g deux fonctions définies sur l'intervalle I et à valeurs réelles.
• Si f et g sont dérivables sur I, alors pour tout $(\lambda, \beta) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda f + \beta g$ est dérivable sur I. De plus,

$$\forall (\lambda, \beta) \in \mathbb{R}^2, (\lambda f + \beta g)' = \lambda f' + \beta g'.$$

• Si f et g sont dérivables sur I, alors la fonction $f \times g$ est dérivable sur I. De plus,

$$(f \times g)' = f'g + fg'.$$

• Si f et g sont dérivables sur I et si g ne s'annule pas sur I, alors la fonction f/g est dérivable sur I. De plus,

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Théorème 10 (Composition de fonctions dérivables)

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur les intervalles I et J et à valeurs réelles. On suppose que :
• $f(I) \subset J$,
• f est dérivable sur I,
• g est dérivable sur J.
Alors, la fonction $g \circ f$ est dérivable sur I. De plus, $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$.

12.1.3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

On généralise à présent la notion de dérivée d'une fonction appelée également dérivée première.

Définition 11 (Fonction k fois dérivable)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle I.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, f est $k+1$ fois dérivable sur I si et seulement si f est k fois dérivable sur I et sa dérivée $k^{\text{ième}}$, notée $f^{(k)}$, est dérivable sur I.

Remarques :
• Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En cas d'existence, les dérivées successives de f sont donc définies par récurrence :

$$f^{(0)} = f \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![0, k-1]\!], f^{(i+1)} = (f^{(i)})'.$$

On note plus simplement $f^{(1)} = f'$ et $f^{(2)} = f''$. En résumé, f est k fois dérivable sur I si et seulement si on peut la dériver k fois, c'est-à-dire si et seulement si f', f'',..., et $f^{(k)}$ existent.

Définition 12 (Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle I.
• f est de classe $\mathcal{C}^0$ sur I si et seulement si f est continue sur I.
• Soit $k \in \mathbb{N}^*$. f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I si seulement si f est k fois dérivable sur I et sa dérivée $k^{\text{ième}}$ $f^{(k)}$ est continue sur I.
• f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si et seulement si f admet des dérivées à tout ordre sur I.

Remarques :
• Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.
• Les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sont très importantes dans la pratique car il s'agit des fonctions avec lesquelles on peut réaliser une intégration par parties lors d'un calcul d'intégrale.
• Les définitions précédentes s'étendent sans difficulté à une partie D qui est une réunion finie d'intervalles non vides et non réduits à un singleton.

Etudions rapidement la régularité des fonctions usuelles.
Un polynôme est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Une fraction rationnelle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition qui est l'ensemble des points en lesquels son dénominateur ne s'annule pas. Les fonctions exponentielle et logarithme sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine de définition. Les fonctions racines $n^{\text{ièmes}}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ lorsque n est pair et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ lorsque n est impair et ne sont pas dérivables en 0.
On peut retenir le petit formulaire suivant.

⋆ On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}$.
$\forall k \leq n$, $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(k)}(x) = n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} = \binom{n}{k} k! x^{n-k}$ et $\forall k \geq n+1, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(k)}(x) = 0$.

⋆ $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \exp^{(k)}(x) = \exp(x)$.

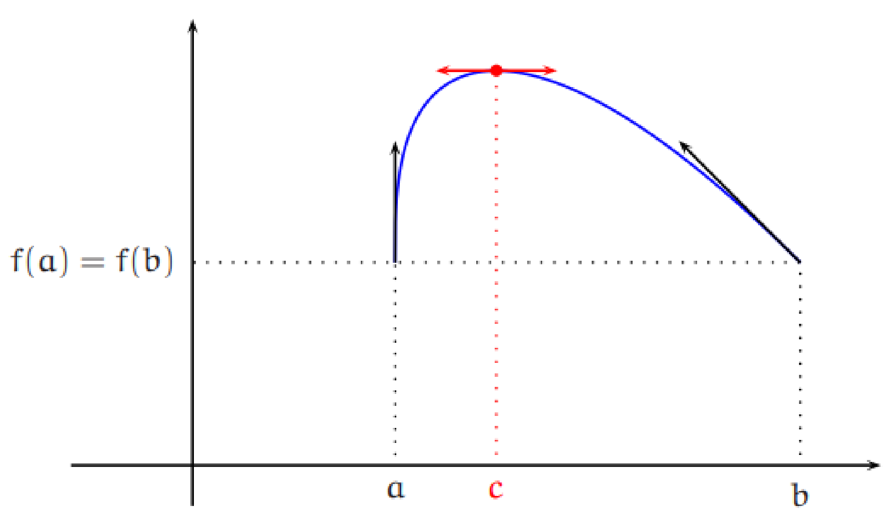
⋆ $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0, +\infty[\,, \ln^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$.

12.1.4 Théorème de Rolle

Théorème 13 (Théorème de Rolle)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur le segment $[a, b]$. On suppose que :
• f est continue sur $[a, b]$,
• f est dérivable sur $]a, b[$,
• $f(a) = f(b)$.
Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

⋆ Interprétation géométrique : La conclusion du théorème de Rolle exprime qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point de coordonnées $(c, f(c))$ est nulle ou encore que la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point de coordonnées $(c, f(c))$ est parallèle à l'axe des abscisses.



$\star$ Interprétation cinématique : En physique, a et b sont des instants que nous notons donc plutôt t_1 et t_2. On considère le mouvement rectiligne d'un mobile représenté par une fonction x (de la variable t), $x'(t)$ désignant sa vitesse instantanée à l'instant t. On suppose que ce mobile se déplace de la gauche vers la droite et se trouve au même endroit aux instants t_1 et t_2 (c'est-à-dire que $x(t_1) = x(t_2)$), alors à un instant t_3 (qui correspond à c) compris entre t_1 et t_2, il a nécessairement fait demi-tour, donc sa vitesse instantanée s'est annulée en t_3 : $x'(t_3) = 0$.

12.1.5 Etude des variations d'une fonction à valeurs réelles

Une application majeure de la dérivabilité est l'étude des variations d'une fonction que l'on résume dans un *tableau de variations* à partir duquel on peut déduire l'existence d'extremum ou obtenir des inégalités.

Théorème 14 (Application de la dérivabilité à l'étude de la monotonie)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle I.
- f est croissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$.
- f est constante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) = 0$.

Remarque : L'hypothèse « I est un intervalle » est essentielle. Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x > 0, f(x) = 1$ et $\forall x < 0, f(x) = -1$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée nulle et n'est pas constante sur $\mathbb{R}^*$.

On dispose également d'une caractérisation des fonctions strictement croissantes ou strictement décroissantes parmi les fonctions dérivables sur un intervalle.

Théorème 15 (Application de la dérivabilité à l'étude de la stricte monotonie)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle I.
- f est strictement croissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ et il n'existe pas de segment $[a, b] \subset I$ avec $a < b$ sur lequel f' est nulle.
- f est strictement décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$ et il n'existe pas de segment $[a, b] \subset I$ avec $a < b$ sur lequel f' est nulle.

Les théorèmes précédents, bien que permettant de couvrir un large choix de fonctions, ne s'appliquent pas à la fonction racine carrée qui est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$, croissante (et même strictement croissante) sur $[0, +\infty[$ mais seulement dérivable sur $]0, +\infty[$. On énonce deux résultats hors programme qui solutionnent ce type de cas. On appelle *intérieur de* I et on note $\overset{\circ}{I}$ l'ensemble des points de I qui ne sont pas des extrémités. Par exemple, si $I = [a, b]$ avec a et b deux réels tels que $a < b$, alors l'intérieur de I est $]a, b[$.

Théorème 16 (Application de la continuité et de la dérivabilité à l'étude de la monotonie)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle I et dérivable sur l'intérieur de I.
- f est croissante sur I si et seulement si $\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) \geq 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) \leq 0$.

Théorème 17 (Application de la continuité et de la dérivabilité à l'étude de la stricte monotonie)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle I et dérivable sur l'intérieur de I.
- f est strictement croissante sur I si et seulement si $\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) \geq 0$ et il n'existe pas de segment $[a, b] \subset \overset{\circ}{I}$ avec $a < b$ sur lequel f' est nulle.
- f est strictement décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) \leq 0$ et il n'existe pas de segment $[a, b] \subset \overset{\circ}{I}$ avec $a < b$ sur lequel f' est nulle.

Passons maintenant à la recherche de maximum ou de minimum local.

Définition 18 (Maximum local, minimum local, extremum local)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle I. Soit $a \in I$.

• f admet en a un maximum local, égal à $f(a)$, si et seulement si $\exists \eta > 0, \forall x \in [a-\eta, a+\eta] \cap I, f(x) \leq f(a)$.

• f admet en a un minimum local, égal à $f(a)$, si et seulement si $\exists \eta > 0, \forall x \in [a-\eta, a+\eta] \cap I, f(x) \geq f(a)$.

• f admet en a un extremum local, égal à $f(a)$, si et seulement si f admet en a un maximum local ou un minimum local.

• f admet en a un maximum local strict, égal à $f(a)$, si et seulement si :

$$\exists \eta > 0, \forall x \in ([a-\eta, a+\eta] \cap I) \backslash \{a\}, f(x) < f(a).$$

• f admet en a un minimum local strict, égal à $f(a)$, si et seulement si :

$$\exists \eta > 0, \forall x \in ([a-\eta, a+\eta] \cap I) \backslash \{a\}, f(x) > f(a).$$

• f admet en a un extremum local strict, égal à $f(a)$, si et seulement si f admet en a un maximum local strict ou un minimum local strict.

Le théorème ci-dessous donne une condition nécessaire d'existence d'un extremum local en un point a intérieur à I (c'est-à-dire qui n'est pas une borne de I).

Théorème 19 (Condition nécessaire d'existence d'un extremum local)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle I. Soit a un point intérieur à I.
Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.

Remarques :
• L'hypothèse « a est un point intérieur à I » est essentielle. Par exemple, la restriction de la fonction carré à $[0, 1]$ admet un maximum global, donc a fortiori local, en 1 mais sa dérivée en 1 est égale à $2 \neq 0$.
• Si I est un intervalle ouvert, la condition « a est un point intérieur à I » est automatiquement vérifiée pour tout point a de I. Ceci conduit à l'énoncé classique suivant.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle ouvert I. Soit $a \in I$.
Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.
Cette proposition exprime que les extrema éventuels d'une fonction f dérivable sur un intervalle ouvert sont à chercher parmi les zéros de sa dérivée, aussi appelés points critiques.
• La réciproque du théorème précédent est fausse. Par exemple, la fonction cube a une dérivée qui s'annule en 0 mais n'admet pas d'extremum local en 0.

On donne maintenant une condition suffisante d'existence d'un extremum local en un point a intérieur à I.

Théorème 20 (Condition suffisante d'existence d'un extremum local)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle I. Soit a un point intérieur à I.
Si f' s'annule en a, en changeant de signe, alors f admet un extremum local en a.

Remarque : A nouveau, si I est un intervalle ouvert, la condition « a est un point intérieur à I » est automatiquement vérifiée pour tout point a de I.

12.2 Convexité

Cette partie a pour but l'étude de la convexité d'une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Dans le cas où la fonction étudiée est dérivable sur I, la convexité nous permet de préciser la position de sa courbe représentative par rapport à ses tangentes. De manière plus générale, la convexité facilite la démonstration de nombreuses inégalités.

12.2.1 Parties convexes de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}^2$

Commençons par définir ce qu'est une partie convexe de $\mathbb{R}$.

Définition 21 (Partie convexe de $\mathbb{R}$)

Soit C une partie de $\mathbb{R}$. C est convexe si et seulement si $\forall (a,b) \in C^2, [a,b] \subset C$.

On peut décrire très facilement les parties convexes de $\mathbb{R}$.

Théorème 22 (Description des parties convexes de $\mathbb{R}$)

Les intervalles sont exactement les parties convexes de $\mathbb{R}$.

Remarque : On peut lister aisément les intervalles de $\mathbb{R}$. Ce sont les ensembles de la forme : $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$, $]a,b[$, $]-\infty,a]$, $]-\infty,a[$, $[b,+\infty[$, $]b,+\infty[$, $]-\infty,+\infty[$ et $\emptyset$, a et b désignant deux réels tels que $a \leq b$.

On généralise à présent la notion de convexité à une partie de $\mathbb{R}^2$. Pour ce faire, on doit d'abord définir ce qu'est un segment de $\mathbb{R}^2$.

Définition 23 (Segment de $\mathbb{R}^2$)

Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points du plan.
Le segment $[A,B]$ est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées s'écrivent $((1-\lambda)x_A + \lambda x_B, (1-\lambda)y_A + \lambda y_B)$ pour un certain $\lambda \in [0,1]$.

Remarques :
- Le segment $[A,B]$ est aussi l'ensemble des points du plan dont les coordonnées s'écrivent $(\lambda x_A + (1-\lambda)x_B, \lambda y_A + (1-\lambda)y_B)$ pour un certain $\lambda \in [0,1]$. La première définition est meilleure puisque l'on parcourt alors le segment $[A,B]$ de A vers B (i.e. quand λ décrit $[0,1]$) tandis que, dans le second cas, on parcourt le segment $[A,B]$ de B vers A .
- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle I. Soient $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ deux points de la courbe représentative de f. Le segment $[A,B]$ composé des points dont les coordonnées s'écrivent $((1-\lambda)a + \lambda b, (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b))$ pour un certain $\lambda \in [0,1]$ est appelé *corde reliant A et B*.

Définition 24 (Partie convexe de $\mathbb{R}^2$)

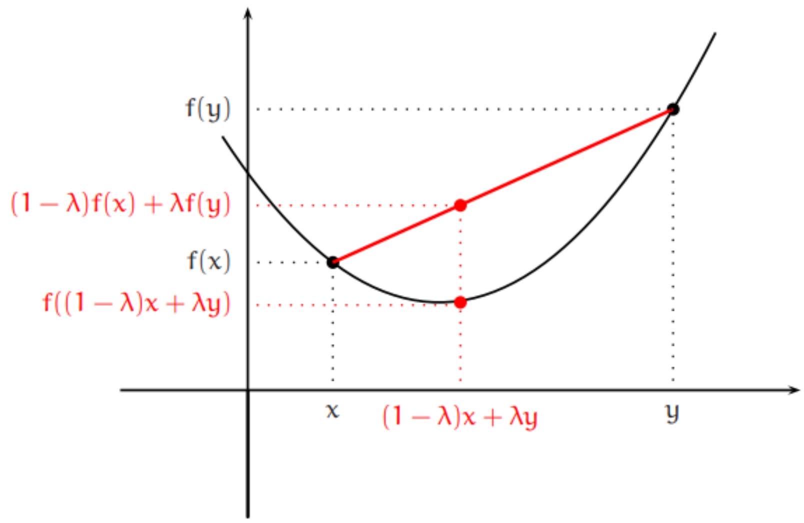
Soit C une partie de $\mathbb{R}^2$. C est convexe si et seulement si $\forall (A,B) \in C^2, [A,B] \subset C$.

12.2.2 Généralités sur les fonctions convexes

Définition 25 (Fonction convexe sur un intervalle)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle I.
f est convexe sur I si et seulement si $\forall (x,y) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1], f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$.

Remarques :
• Il est fondamental que I soit un intervalle. En effet, cette condition garantit que le point $(1-\lambda)x+\lambda y, \lambda \in [0,1]$, appartient à I dès lors que x et y sont des éléments de I.
• Graphiquement, la convexité d'une fonction se traduit par le fait que *chacune des cordes de son graphe est au-dessus de l'arc de courbe qu'elle intercepte.*



Définition 26 (Epigraphe d'une fonction)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle I.
L'épigraphe de f est l'ensemble : $\big\{(x,y) \in I \times \mathbb{R}, y \geq f(x)\big\}$.

Remarque : L'épigraphe de f est la partie du plan située au-dessus (au sens large) du graphe de f.

Théorème 27 (Plusieurs caractérisations de la convexité)

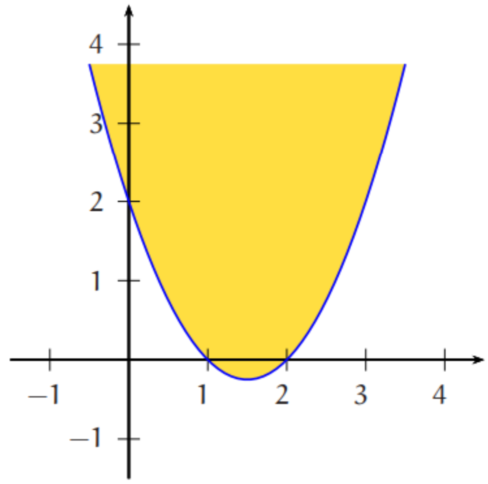
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle I. Les propositions suivantes sont équivalentes.
1) f est convexe sur I.
2) L'épigraphe de f est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.
3) f vérifie l'inégalité de Jensen :

$$\forall n \geq 2, \forall (x_i)_{1\leq i\leq n} \in I^n, \forall (\lambda_i)_{1\leq i\leq n} \in [0,1]^n, \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \implies f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)\right).$$

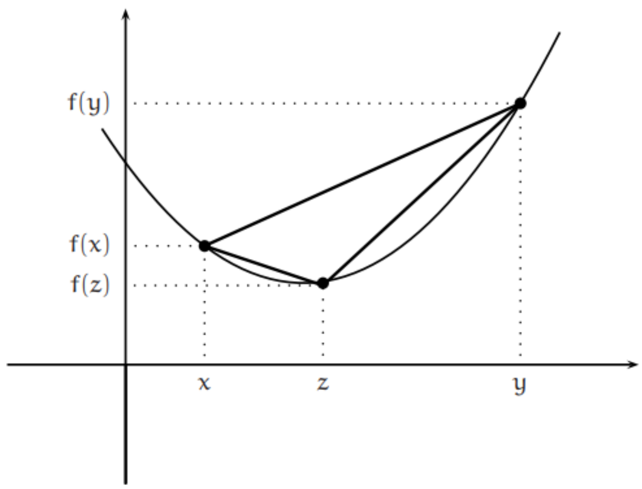
4) Pour tout $a \in I$, $p_a : I\backslash\{a\} \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in I\backslash\{a\}, p_a(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I\backslash\{a\}$.
5) f vérifie les inégalités des pentes croissantes :

$$\forall (x,y,z) \in I^3, \left(x < z < y \implies \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z}\right).$$

Remarques :
• Pour démontrer le théorème précédent, on prouve que chacune des assertions est équivalente à la définition de la convexité avec les cordes.
• Le deuxième point fait le lien entre la convexité d'une fonction et la convexité d'une partie de $\mathbb{R}^2$, à savoir son épigraphe.



• Il ne faut pas apprendre par cœur les inégalités des pentes croissantes mais savoir les retrouver à l'aide d'un dessin.



12.2.3 Fonctions convexes dérivables

On énonce maintenant une caractérisation des fonctions convexes dérivables.

Théorème 28 (Caractérisation des fonctions convexes dérivables)

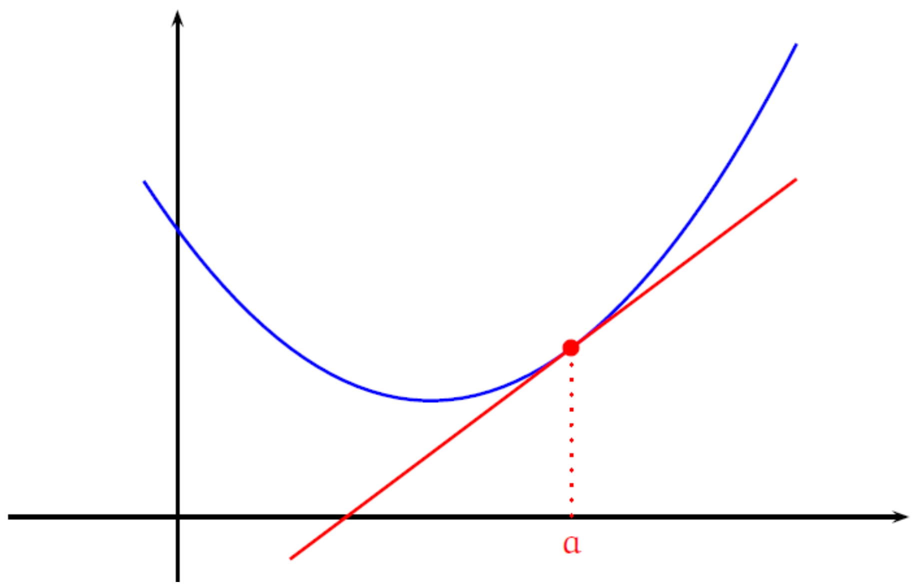
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle I.
f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.

Proposition 29 (Caractérisation des fonctions convexes dérivables à l'aide de leurs tangentes)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle I.
f est convexe sur I si et seulement si sa courbe représentative est au-dessus de chacune de ses tangentes.

Remarques :
• f est convexe sur I si et seulement si $\forall a \in I, \forall x \in I, f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$.
• On déduit immédiatement du résultat précédent qu'*une fonction convexe dérivable admet un minimum global en* $a \in \overset{\circ}{I}$ *si et seulement si* $f'(a) = 0$.
• Attention, toutes les fonctions convexes ne sont pas dérivables. Par exemple, la fonction valeur absolue est bien

convexe sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en 0.
• Attardons-nous un instant sur la régularité d'une fonction convexe. On démontre à l'aide des inégalités des pentes croissantes la proposition suivante.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe sur l'intervalle ouvert I. Alors, f est dérivable à gauche et à droite en tout point de I. En particulier, f est continue sur I.
On ne peut en revanche rien dire quant à la continuité d'une fonction convexe aux bornes réelles d'un intervalle fermé. La restriction de la fonction exponentielle à $[0, +\infty[$ est convexe et continue sur $[0, +\infty[$ tandis que la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x > 0, f(x) = e^x$ et $f(0) = 2$ est convexe sur $[0, +\infty[$ et n'est pas continue en 0.



Théorème 30 (Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle I.
f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I.

Remarque : La convexité d'une fonction se démontre souvent à partir d'un calcul de dérivée seconde.

12.2.4 Fonctions concaves

Définition 31 (Fonction concave sur un intervalle)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle I.
f est concave sur I si et seulement si $-f$ est convexe sur I. Autrement dit,
f est concave sur I si et seulement si $\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], f((1-\lambda)x + \lambda y) \geq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$.

Remarques :
• Tous les résultats énoncés précédemment s'adaptent sans difficulté aux fonctions concaves. Il suffit simplement de *changer le sens des différentes inégalités*.
• Dans le cas des fonctions concaves, l'ensemble $\{(x, y) \in I \times \mathbb{R}, y \leq f(x)\}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.
• On peut décrire les fonctions à la fois convexes et concaves : il s'agit des *fonctions affines*.

Pour montrer qu'une fonction est concave, on utilise généralement l'un des deux résultats qui suivent.

Théorème 32 (Caractérisation des fonctions concaves dérivables)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle I.
f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I.

Théorème 33 (Caractérisation des fonctions concaves deux fois dérivables)

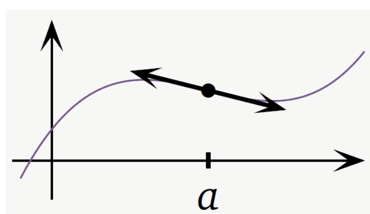
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle I.
f est concave sur I si et seulement si f'' est négative sur I.

Certaines fonctions sont convexes sur une partie de leur domaine de définition et concaves sur l'autre. On donne alors un nom particulier au point en lequel « elles changent de convexité ».

Définition 34 (Point d'inflexion)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle I. Soit $a \in I$ tel que a n'est pas une borne de I.
a est un point d'inflexion de la courbe représentative de f si et seulement si f est convexe au voisinage de a à gauche et concave au voisinage de a à droite, ou bien l'inverse.

Remarque : Si f est deux fois dérivable sur I, alors a est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si f'' est positive au voisinage de a a gauche, f'' s'annule en a et f'' est négative au voisinage de a à droite, ou bien l'inverse.



12.2.5 Applications de la convexité et de la concavité

On a vu que le graphe d'une fonction dérivable convexe (resp. concave) est au-dessus (resp. en dessous) de ses tangentes et en dessous (resp. au-dessus) de ses cordes. Cela permet d'établir facilement quelques inégalités classiques.

Proposition 35 (Inégalités classiques de convexité et de concavité)

1) $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$.

2) $\forall x \in]0, +\infty[, \ln(x) \leq x - 1$ ou encore $\forall x > -1, \ln(1 + x) \leq x$.

3) $\forall (x, y) \in ([0, +\infty[)^2, \forall (p, q) \in (]0, +\infty[)^2, \left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 \implies xy \leq \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}\right)$ (inégalité de Young).

Le résultat qui suit assure que la moyenne géométrique de n réels positifs est toujours plus petite que leur moyenne arithmétique et provient de l'inégalité de Jensen.

Proposition 36 (Comparaison entre la moyenne géométrique et la moyenne arithmétique)

$$\forall n \geq 2, \forall (x_1, \dots, x_n) \in ([0, +\infty[)^n,\ \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$