Chapitre 10

Applications linéaires

L'objet de ce chapitre est l'étude des applications qui respectent la structure d'espace vectoriel.

10.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1 (Application linéaire)

Soient $(E, +, .)$ et $(F, +, .)$ deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Soit $f : E \to F$ une application.
f est une application linéaire de E dans F si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Remarques :
• On observe que f est une application linéaire si et seulement si *l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images.*
• Lorsque $F = \mathbb{R}$, on dit que f est une forme linéaire à valeurs dans $\mathbb{R}$.
• On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
• On a toujours : $f(0_E) = 0_F$.

Définition 2 (Isomorphisme, endomorphisme et automorphisme)

Soient $(E, +, .)$ et $(F, +, .)$ deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
• Un isomorphisme de E sur F est une application linéaire bijective de E sur F.
• Un endomorphisme de E est une application linéaire de E dans E.
• Un automorphisme de E est une application linéaire bijective de E sur E.

Remarque : On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et $\mathrm{GL}(E)$ celui des automorphismes de E.

Proposition 3 (La réciproque d'une application linéaire bijective est linéaire.)

Soient $(E, +, .)$ et $(F, +, .)$ deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Soit $f : E \to F$ une application.
Si f est linéaire et bijective de E sur F, alors f^{-1} est linéaire.

Théorème 4 (Description des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$)

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Les applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ sont les applications de la forme :

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n, \dots, a_{p,1}x_1 + \cdots + a_{p,n}x_n), \quad \text{où} \quad (a_{i,j})_{1 \le i \le p, 1 \le j \le n} \in \mathbb{R}^{np}.$$

10.2 Applications linéaires et sous-structures

Proposition 5 (Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire)

Soient $(E,+,.)$ et $(F,+,.)$ deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
• Pour tout sous-espace A de E, $f(A)$ est un sous-espace de F.
• Pour tout sous-espace B de F, $f^{-1}(B)$ est un sous-espace de E.

Lors de l'étude d'une application linéaire, on s'intéresse plus particulièrement à deux ensembles, son noyau et son image, lesquels vont nous donner des renseignements sur son injectivité ou sa surjectivité éventuelles.

Définition 6 (Noyau et image d'une application linéaire)

Soient $(E,+,.)$ et $(F,+,.)$ deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
• Le noyau de f, noté $\mathrm{Ker}(f)$, est défini par :

$$\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{0_F\}) = \big\{x \in E, f(x) = 0_F\big\}.$$

$\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.
• L'image de f, notée $\mathrm{Im}(f)$, est définie par :

$$\mathrm{Im}(f) = f(E) = \big\{y \in F, \exists x \in E, f(x) = y\big\} = \big\{f(x), x \in E\big\}.$$

$\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Proposition 7 (Caractérisations de l'injectivité et de la surjectivité d'une application linéaire)

Soient $(E,+,.)$ et $(F,+,.)$ deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
• f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
• f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

Remarques :
• On note que le second point n'est qu'une réécriture de la définition de la surjectivité.
• f est bijective (autrement dit, f est un isomorphisme) si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ et $\mathrm{Im}(f) = F$.

10.3 Applications linéaires et familles de vecteurs

Théorème 8 (Description de l'image d'une application linéaire à l'aide d'une famille génératrice de E)

Soient $(E,+,.)$ et $(F,+,.)$ deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $(u_i)_{1\leq i\leq p}$, une famille de $p \geq 1$ vecteurs de E.
Si $(u_i)_{1\leq i\leq p}$ est une famille génératrice de E, alors $(f(u_i))_{1\leq i\leq p}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$:

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((f(u_i))_{1\leq i\leq p}).$$

Remarque : Ce théorème est un résultat pratique. En exercices, on connaît généralement une base de l'espace vectoriel de départ, qui est donc en particulier une famille génératrice. L'image de f est alors le sous-espace vectoriel engendré par les images des vecteurs de cette base.

10.4 Structure de l'ensemble des applications linéaires

Etant donnés deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels E et F, on étudie ici la structure des ensembles $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{L}(E)$. On commence par observer que $(F^E,+,.)$ l'ensemble des applications définies sur l'espace vectoriel E à valeurs dans l'espace vectoriel F muni de la somme et de la multiplication par un scalaire est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. $\mathcal{L}(E,F)$ en est alors un sous-espace.

10.4.1 Etude de $\mathcal{L}(E,F)$

Théorème 9 (Structure d'espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$)

Soient $(E,+,.)$ et $(F,+,.)$ deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
$(\mathcal{L}(E,F),+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Remarque : En particulier, *une combinaison linéaire d'applications linéaires est une application linéaire.*

Proposition 10 (Règles de calcul dans l'espace $\mathcal{L}(E,F)$)

Soient $(E,+,.)$, $(F,+,.)$ et $(G,+,.)$ trois $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

- Composée d'applications linéaires : $\forall (f,g)\in\mathcal{L}(E,F)\times\mathcal{L}(F,G), g\circ f\in\mathcal{L}(E,G)$.
- Linéarité à gauche de la composition : $\forall (f,g,h)\in\mathcal{L}(F,G)\times\mathcal{L}(F,G)\times\mathcal{L}(E,F), (f+g)\circ h = f\circ h + g\circ h$.
- Linéarité à droite de la composition : $\forall (f,g,h)\in\mathcal{L}(F,G)\times\mathcal{L}(E,F)\times\mathcal{L}(E,F), f\circ(g+h) = f\circ g + f\circ h$.

Remarques :
- Au second point, l'hypothèse de linéarité des applications f, g et h est superflue.
- Le deux derniers points expriment que la composition est une opération bilinéaire.

10.4.2 Etude de $\mathcal{L}(E)$

On suppose à présent que $E = F$. Etant donnés $f\in\mathcal{L}(E)$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on définit les itérés successifs de f de la manière suivante : $f^0 = \mathrm{id}_E$ et $f^n = f\circ\cdots\circ f$, avec n facteurs f. On dispose alors des règles de calcul classiques concernant les exposants : $\forall (m,p)\in\mathbb{N}^2, f^m\circ f^p = f^{m+p}$ et $(f^m)^p = f^{mp}$. On dispose de certaines identités remarquables lorsque l'on manipule des endomorphismes qui commutent entre eux. Dans la suite, si $(f,g)\in(\mathcal{L}(E))^2$, alors on notera fg la composition $f\circ g$.

Proposition 11 (Identités remarquables dans $\mathcal{L}(E)$)

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $(f,g)\in(\mathcal{L}(E))^2$. Si f et g commutent, c'est-à-dire si $fg = gf$, alors les égalités suivantes sont vérifiées.

- Formule du binôme de Newton : $\forall n\in\mathbb{N}, (f+g)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^k g^{n-k}$.
- Différence de puissances $n^{\text{ièmes}}$: $\forall n\in\mathbb{N}^*, f^n - g^n = (f-g)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f^{n-1-k} g^k$.

Précisons également que si f et g sont deux endomorphismes de E tels que $f\circ g = 0$, alors f peut ne pas être nul et g non plus. Autrement dit, la phrase « une composée d'endomorphismes est nulle si et seulement si l'un d'entre eux est nul » est fausse.

10.5 Applications linéaires en dimension finie

Théorème 12 (Dimension de $\mathcal{L}(E,F)$)

Soient $(E,+,.)$ et $(F,+,.)$ deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors,

$$\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F).$$

En particulier, $\dim(\mathcal{L}(E)) = \dim(E)^2$.

10.6 Rang d'une application linéaire en dimension finie

Dans cette sous-partie, on s'intéresse à l'image d'une application linéaire définie sur un espace vectoriel de dimension finie. Notre résultat principal est le théorème du rang qui nous permettra de caractériser de manière très efficace les applications linéaires bijectives.

Définition 13 (Rang d'une application linéaire)

Soient $(E,+,.)$ et $(F,+,.)$ deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On suppose que E est de dimension finie.
Le rang de f, noté $\mathrm{rg}(f)$, est la dimension de l'image de f. Autrement dit,

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) \in \mathbb{N}.$$

On fait le lien avec le rang d'une famille de vecteurs.

Proposition 14 (Lien entre rang d'une application linéaire et rang d'une famille de vecteurs)

Soient $(E,+,.)$ et $(F,+,.)$ deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \le i \le n}$ une base de E. Alors,

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}((f(e_i))_{1 \le i \le n}).$$

Remarques :
- L'égalité résulte de l'identité $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((f(e_i))_{1 \le i \le n})$.
- Le rang de f ne dépend bien sûr pas de la base choisie puisque si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont deux bases de E, alors les familles $f(\mathcal{B}_1)$ et $f(\mathcal{B}_2)$ engendrent le même sous-espace vectoriel : $\mathrm{Im}(f)$.

On énonce à présent le théorème phare de cette partie.

Théorème 15 (Théorème du rang)

Soient $(E,+,.)$ et $(F,+,.)$ deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On suppose que E est de dimension finie. Alors,

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f).$$

Nos deux derniers théorèmes permettent de démontrer facilement qu'une application linéaire dont les espaces de départ et d'arrivée sont de même dimension finie est bijective en se contentant de démontrer l'injectivité.

Théorème 16 (Caractérisations des isomorphismes en dimension finie)

Soient $(E,+,.)$ et $(F,+,.)$ deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On suppose que E et F sont de dimension finie et que $\dim(E) = \dim(F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- f est injective.
- f est surjective.
- f est bijective.
- Il existe $g \in \mathcal{L}(F,E)$ tel que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.
- Il existe $g \in \mathcal{L}(F,E)$ tel que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.

Remarques :

• Le quatrième point implique de manière immédiate que f est injective et le cinquième point que f est surjective.

• D'après ce théorème, l'égalité $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ avec $g \in \mathcal{L}(F,E)$ entraîne donc immédiatement que g est la bijection réciproque de f alors que sans l'hypothèse de linéarité, dans le cadre général de la théorie des ensembles, on aurait besoin de démontrer également l'égalité $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.

En prenant $E = F$, on en déduit immédiatement une caractérisation des automorphismes en dimension finie.

Théorème 17 (Caractérisations des automorphismes en dimension finie)

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- f est injective.
- f est surjective.
- f est bijective.
- f est inversible à gauche : il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.
- f est inversible à droite : il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$.