

BSB 2022 (3) :

Exercice 3 (probabilités discrètes, couples de v.a.)

Une urne contient initialement deux boules rouges et une boule bleue. Un jeu consiste à répéter la séquence suivante :

- tirer une boule au hasard dans l'urne ;
- si la boule tirée est bleue, la remettre dans l'urne ;
- si la boule tirée est rouge, la retirer et la remplacer par une boule bleue.

On définit, pour tout entier naturel k non nul, les événements B_k : « obtenir une boule bleue lors de la k -ème séquence » et R_k : « obtenir une boule rouge lors de la k -ème séquence ».

1/ a/ Calculer $P(B_1)$ et $P(R_1)$.

b/ En utilisant la formule des probabilités totales, calculer $P(B_2)$ et $P(R_2)$.

c/ On constate à l'issue de la deuxième séquence que la boule tirée est bleue. Quelle est la probabilité que le premier tirage ait amené une boule rouge ?

2/ On note Y_1 la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges présentes dans l'urne à l'issue de la première séquence de jeu.

a/ Déterminer l'ensemble $Y_1(\Omega)$ des valeurs prises par Y_1 .

b/ En utilisant la question 1/a/, calculer $P(Y_1 = 1)$ et $P(Y_1 = 2)$.

c/ Calculer l'espérance de Y_1 .

3/ On note Y_2 la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges présentes dans l'urne à l'issue de la deuxième séquence de jeu.

a/ Justifier que :

$$Y_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$$

b/ Justifier que :

$$P([Y_1 = 2] \cap [Y_2 = 2]) = P(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{9}$$

c/ En procédant de la même manière que dans la question précédente, justifier avec précision que la loi conjointe du couple (Y_1, Y_2) est donnée par :

$i \in Y_1(\Omega) \backslash j \in Y_2(\Omega)$	0	1	2
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	0
2	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

4/ a/ Dédurre de la loi conjointe du couple (Y_1, Y_2) la loi de Y_2 . En déduire son espérance.

b/ En utilisant le tableau de la question 3/c/, calculer $E(Y_1 Y_2)$.

c/ Montrer que la covariance de (Y_1, Y_2) est égale à $\frac{4}{27}$. Les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont-elles indépendantes ?

- 5/ Dans le programme suivant, on introduit la variable r qui représente le nombre de boules rouges présentes dans l'urne à un instant donné.

```
1 import numpy as np
2 import numpy.random as rd
3
4 n = int(input("entrez une valeur pour n : "))
5 r = 2
6 for k in range(n):
7     if r == 2:
8         if rd.random() < 2/3:
9             r = 1
10    else:
11        if r == 1:
12            if .....
13                .....
14 print(r)
```

- a/ Recopier et compléter les lignes 12 et 13 de ce programme afin qu'il simule n séquences du jeu, l'entier $n \geq 1$ étant donné par l'utilisateur.
- b/ À quelle variable aléatoire de l'exercice correspond le nombre affiché lorsque l'utilisateur donne 2 comme valeur à n ?
- c/ Dans l'instruction `if` des lignes 7 à 13, le cas $r == 0$ n'apparaît pas. Expliquer pourquoi ce n'est pas nécessaire.