BSB 2022 (2) :

Exercice 2 (analyse)

On considère la fonction f définie, pour tout réel x, par :

$$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} + x$$

On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 2 cm.

1/ **a/** Calculer la dérivée f' de f. Calculer de même la dérivée f'' de f'. Vérifier que pour tout réel x :

$$f''(x) = \frac{\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x - 1\right)}{\left(1+\mathrm{e}^x\right)^3}$$

b/ Étudier la convexité de f. Vérifier que la courbe (C) admet un point d'inflexion et préciser ses coordonnées.

c/ Déterminer le sens de variation de f'. Vérifier que $f'(0) = \frac{3}{4}$. En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2/ **a/** Rappeler $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x$. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b/ Dresser le tableau de variations de f en y faisant figurer les limites de f calculées en **2/a/**.

3/ **a/** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x)$. En déduire que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

b/ Justifier de même que la droite (D') d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (C) en $-\infty$.

c/ On note A le point de coordonnées $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point A.

d/ Tracer sur une même figure les droites (D), (D') et (T) ainsi que l'allure de la courbe (C).

4/ **a/** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une unique solution α.

b/ Justifier que $-1 \leqslant \alpha \leqslant 0$.

c/ Recopier et compléter le programme suivant afin qu'il affiche une valeur approchée de α à 10^{-3} près par dichotomie.

```
import numpy as np

def f(x):
    y = .....
    return y

a = -1
b = 0
while .....
    c = (a+b)/2
    if f(c)*f(a) < 0:
        b = .....
    else:
        .....
print(.....)
```