

BSB 2021 (4) + ESCP 2021 (2) :

Exercice 4 (probabilités continues)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = 0 \quad \text{si } t < 0 \quad \text{et} \quad f(t) = e^{-t/2} - e^{-t} \quad \text{si } t \geq 0$$

1/ a/ Montrer que f est positive sur $\mathbb{R}$.

b/ Établir que f est continue sur $\mathbb{R}$.

c/ Soit a un réel strictement positif.

Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} dt = \frac{1}{a}$$

d/ Dédurre des questions précédentes que f est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire ayant f pour densité.

2/ Soit F la fonction de répartition de X .

a/ Calculer $F(x)$ pour tout réel $x < 0$.

b/ Montrer que pour tout réel $x \geq 0$ on a :

$$F(x) = 1 - 2e^{-x/2} + e^{-x}$$

3/ a/ Soit Y une variable aléatoire à densité suivant une loi exponentielle de paramètre $a \in]0, +\infty[$.

Donner une densité de Y . Rappeler l'espérance de Y .

b/ En déduire que $\int_0^{+\infty} te^{-at} dt$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} te^{-at} dt = \frac{1}{a^2}$$

c/ Montrer que X admet une espérance et que $E(X) = 3$.

Exercice 2 (probabilités continues)

On désigne par λ un réel strictement positif et par p un réel de $]0, 1[$.

1/ Soit Z une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ .

a/ Donner sans calcul la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx$.

b/ Donner sans calcul les valeurs de $E(Z)$ et $V(Z)$.

c/ En déduire la valeur des intégrales $\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx$ et $\int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx$.

2/ On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda(1-p)e^{-\lambda x} + \lambda^2 p x e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

a/ Utiliser les questions précédentes pour montrer la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx$$

et donner sa valeur.

b/ En déduire que f est une densité de probabilité.

c/ On désigne par X une variable aléatoire de densité f . Montrer que X possède une espérance et donner sa valeur.

3/ On note F la fonction de répartition de X .

a/ Montrer, grâce à une intégration par parties, que l'on a :

$$\forall x \geq 0 \quad \int_0^x t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda^2} (1 - (1 + \lambda x) e^{-\lambda x})$$

b/ En déduire l'expression explicite de $F(x)$ pour tout réel x .