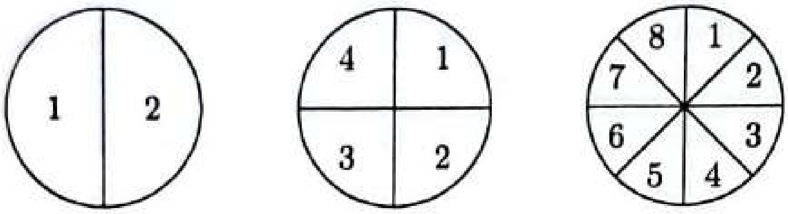
BSB 2021 (3) :

Exercice 3 (probabilités discrètes)

Un forain organise un jeu de fléchettes dans une fête foraine. Le jeu se présente sous la forme de trois cibles A, B et C. La cible A est séparée en deux secteurs, la cible B est séparée en quatre secteurs et la cible C est séparée en 8 secteurs. Sur chaque cible, les secteurs sont de même dimension ce qui signifie qu'un joueur qui lance une fléchette au hasard sur une cible donnée a les mêmes chances d'atteindre chaque secteur de cette cible.



A B C

Le jeu consiste à lancer des fléchettes sur les cibles successives selon le protocole suivant :

- On commence par la cible A. Il faut atteindre le secteur 1 de cette cible pour avoir le droit de passer à la cible B ; dans le cas contraire on continue à lancer la fléchette en direction de la cible A.
- De même, lorsqu'on lance une fléchette en direction de la cible B, il faut atteindre le secteur 1 pour avoir le droit de passer à la cible C ; dans le cas contraire, on continue les lancers vers la cible B.
- Enfin, le joueur ne lance qu'une fois la fléchette en direction de la cible C.
  Le secteur qu'il atteint décide du lot qu'il gagne.

On suppose que le joueur atteint toujours la cible visée et que pour une cible donnée les secteurs atteints le sont de manière équiprobable. On suppose que le joueur continue de lancer des fléchettes autant de fois qu'il est nécessaire pour avoir le droit de passer à la cible C.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note A_n l'événement : « lors du lancer de la n-ème fléchette, le joueur tire vers la cible A ». On définit de même l'événement B_n. On note enfin a_n et b_n les probabilités respectives de A_n et B_n.
Le joueur commençant par la cible A, on a donc $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$.

1/ **a/** Calculer les probabilités a_2 et b_2.

b/ Calculer b_3 et vérifier que $b_3 = \frac{5}{8}$.

2/ En utilisant la formule des probabilités totales, justifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ on a :

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{2}a_n$$

3/ a/ Recopier et compléter la fonction suivante, de paramètre un entier $n \geqslant 1$, afin qu'elle renvoie les valeurs de a_n et b_n.

```
1 def suites(n):
2     a = 1
3     b = 0
4     for i in range(2, n+1):
5         b = .....
6         a = .....
7     return b, a
```

b/ Si on échange les résultats des lignes 5 et 6 le résultat affiché est-il le même ? Pourquoi ?

4/ Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

5/ Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ on pose : $v_n = 2^{n-1}b_n + 2$.

a/ Montrer que $v_1 = 2$ et que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ on a :

$$v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n$$

b/ En déduire une expression de v_n en fonction de n pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

c/ Établir que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ on a :

$$b_n = 2 \times \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}} - \frac{2}{2^{n-1}}$$

6/ On importe la bibliothèque numpy.random par l'instruction

```
import numpy.random as rd
```

On rappelle que l'instruction rd.randint(1, n+1) simule une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fléchettes lancées par le joueur. Recopier le programme suivant et compléter les lignes 10, 11 et 12 afin qu'il simule notre expérience et affiche la valeur de X.

```
1  cible = "a"
2  n = 1
3  while cible != "c":
4      n = n + 1
5      if cible == "a":
6          secteur = rd.randint(1, 3)
7          if secteur == 1:
8              cible = "b"
9      elif cible == "b":
10         secteur = .....
11         if ..... :
12             .....
13 print(n)
```

7/ Il faut payer 1 euro pour chaque fléchette lancée. Les joueurs se découragent vite. Le forain constate qu'en fait, chaque joueur effectue au moins deux lancers et s'il n'obtient pas le droit de tirer sur la cible C après les deux premiers lancers, alors il abandonne le jeu. Les deux euros qu'il a donnés sont alors perdus.

a/ Justifier que la probabilité pour un joueur donné de gagner un lot dans ces conditions est $\frac{1}{8}$.

20 joueurs se présentent successivement et jouent selon ce principe. On suppose que les résultats de chaque joueur sont indépendants les uns des autres. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de joueurs qui gagnent un lot.

b/ Reconnaître la loi de Y. Décrire l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y et donner l'expression de $P(Y = k)$ pour tout entier k appartenant à cet ensemble.

c/ Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.

d/ Chaque lot offert par le forain est d'une valeur de 5 euros. Une fois que les 20 joueurs ont tenté leur chance, on note G la variable aléatoire égale au gain en euros du forain, G étant négatif si le forain perd de l'argent.
Justifier que

$$G = 2(20 - Y) - 2Y$$

Calculer le gain moyen du forain.