

## BSB 2021 (2) :

### Exercice 2 (analyse)

1/ Justifier que pour tout réel  $x$  on a :  $x^2 + x + 1 > 0$ .

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$ . On note  $\mathcal{C}$  sa courbe dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

2/ Rappeler la valeur de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x)$ . Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

3/ Vérifier que  $f(-\frac{1}{2}) = \ln(3) - 2\ln(2)$ .

4/ a/ Justifier que pour tout réel  $x$  on a :

$$f'(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$$

b/ Dresser le tableau des variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  en y faisant figurer les éléments obtenus aux questions 2/ et 3/.

5/ a/ Montrer, en la résolvant, que l'équation  $f(x) = 0$  d'inconnue  $x$  admet exactement deux solutions :  $-1$  et  $0$ .

b/ Justifier que la tangente à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $0$  a pour équation  $y = x$ .  
Déterminer une équation de la tangente à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $-1$ .

6/ a/ Calculer la dérivée seconde de  $f$  et vérifier que pour tout réel  $x$  on a :

$$f''(x) = \frac{-2x^2 - 2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}$$

b/ Étudier la convexité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . Vérifier que  $\mathcal{C}$  admet exactement deux points d'inflexion aux points d'abscisses  $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$  et  $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ .

7/ a/ Justifier, sans la résoudre, que l'équation  $f(x) = 1$  admet exactement une solution  $\alpha$  dans  $[0, +\infty[$ .

b/ On donne  $\ln(3) \approx 1,1$ . Vérifier que  $\alpha \in [0, 1]$ .

c/ Vérifier que  $f(-1 - \alpha) = 1$ .

d/ On importe la bibliothèque `numpy` par l'instruction `import numpy as np`.

Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il permette de calculer une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-3}$  près par dichotomie.

```
1 def f(x):
2     return .....
3 a = 0
4 b = .....
5 while b-a > 10**(-3):
6     c = .....
7     if f(c) < 1:
8         a = .....
9     else:
10        b = .....
11 print(.....)
```

8/ On donne les valeurs suivantes :

$$\alpha \approx 0,9 \quad f(-\frac{1}{2}) \approx -0,3 \quad \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \approx 0,4 \quad \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \approx -1,4$$

Tracer l'allure de la courbe  $\mathcal{C}$  ainsi que les tangentes obtenues en 5/b/.