

BSB 2019 (4) :

Exercice 4 (probabilités continues)

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie par :

$$\begin{cases} f_n(t) = nt^{n-1} & \text{si } t \in [0, 1] \\ f_n(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1/ a/ Calculer $\int_0^1 f_n(t) dt$.

b/ Montrer que f_n est une densité de probabilité.

2/ Soit X_n une variable aléatoire ayant f_n pour densité. On note F_n la fonction de répartition de la variable aléatoire X_n .

a/ Calculer $F_n(x)$ pour tout réel $x < 0$ et tout réel $x > 1$.

b/ Montrer que pour tout réel $x \in [0, 1]$ on a : $F_n(x) = x^n$.

3/ Montrer que X_n admet une espérance et que $E(X_n) = \frac{n}{n+1}$.

4/ Un exemple.

Une cible circulaire de rayon 1 mètre est posée au sol. Deux joueurs 1 et 2 lancent chacun un palet en direction de la cible. On note U_1 et U_2 les variables aléatoires égales aux distances respectives en mètres entre le centre de la cible et les points d'impact des palets des joueurs 1 et 2. On suppose que U_1 et U_2 suivent des lois uniformes sur $[0, 1]$ et qu'elles sont indépendantes.

On note Z la variable aléatoire égale à la plus grande valeur entre U_1 et U_2 et H sa fonction de répartition.

On rappelle l'expression de la fonction de répartition F d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$:

$$\begin{cases} F(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ F(x) = x & \text{si } x \in [0, 1] \\ F(x) = 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a/ Justifier que pour tout réel x , on a :

$$P(Z \leq x) = P([U_1 \leq x] \cap [U_2 \leq x])$$

En déduire l'expression de $H(x)$ pour tout réel x . Vérifier que Z et X_2 suivent la même loi.

b/ Calculer $P(Z \geq \frac{1}{3})$ et $P(\frac{1}{3} \leq Z \leq \frac{1}{2})$. Vérifier que :

$$P_{[Z \geq \frac{1}{3}]} (Z \leq \frac{1}{2}) = \frac{5}{32}$$

c/ On suppose que l'on a importé la bibliothèque `numpy.random` par l'instruction

```
import numpy.random as rd
```

On rappelle que l'instruction `rd.random()` renvoie une réalisation d'une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

Recopier et compléter le programme suivant afin qu'il simule l'expérience ci-dessus et qu'il affiche la valeur de Z .

```
1 U1 = rd.random()
2 U2 = rd.random()
3 if U1 >= U2:
4     .....
5 else:
6     .....
7 print(Z)
```

5/ On revient au cas général où n est un entier naturel non nul quelconque.

On pose :

$$Y_n = -\ln(X_n)$$

On admet que l'on définit ainsi une variable aléatoire à densité. On note G_n sa fonction de répartition.

a/ Montrer que pour tout réel x , on a :

$$G_n(x) = 1 - F_n(e^{-x})$$

b/ Vérifier que si $x < 0$ alors $e^{-x} > 1$. En déduire $G_n(x)$ lorsque $x < 0$.

c/ En utilisant 2/b/ calculer $G_n(x)$ lorsque $x \geq 0$. Reconnaître la loi de Y_n .

d/ Donner $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.