BSB 2019 (1) :

Exercice 1 (matrices et suites)

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1/ Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

2/ Application à l'étude de deux suites.

On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 2$, $b_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_{n+1} = 2a_n + 3^n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = 3b_n + 3^n$$

a/ Quelle instruction faut-il ajouter en ligne 4 dans la fonction suivante, de paramètre n, pour qu'elle renvoie la valeur de a_n ? (on justifiera la réponse)

i. `a = 2*a+3**n` **ii.** `a = 2*a+3**(i-1)` **iii.** une autre instruction à préciser

```
1 def suite(n):
2     a = 2
3     for i in range(1, n+1):
4         .....
5     return a
```

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ 3^n \end{pmatrix}$$

b/ Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$X_{n+1} = AX_n$$

c/ On importe la bibliothèque `numpy` par l'instruction `import numpy as np`.
Recopier et compléter la fonction suivante, de paramètre n, pour qu'elle renvoie la valeur de a_n.

```
def matrice(n):
    A = .....
    X = .....
    for i in range(n):
        X = .....
    return X[0]
```

d/ Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que : $X_n = A^n X_0$.

e/ En déduire en utilisant **1/** que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a_n = 2^n + 3^n \quad \text{et} \quad b_n = n3^{n-1}$$

3/ Application au calcul des puissances d'une autre matrice.

On considère les matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a/ Calculer PQ. En déduire que P est inversible et donner P^{-1}.

b/ Vérifier que $PMP^{-1} = A$.

c/ Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$M^n = P^{-1}A^nP$$

En déduire que pour tout entier naturel n, on a :

$$M^n = \begin{pmatrix} 2 \times 3^n - 2^n & 0 & 2(2^n - 3^n) \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ 3^n - 2^n & 0 & 2^{n+1} - 3^n \end{pmatrix}$$

4/ Application au calcul d'une somme.

a/ Montrer que pour tout entier naturel k, on a :

$$2b_k = b_{k+1} - b_k - 3^k$$

b/ Pour tout entier naturel n, calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k$$

c/ Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1}$$

d/ Déduire des questions précédentes et de **2/e/** que pour tout entier naturel n, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} k3^{k-1} = \frac{(n+1)3^n}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3^{n+1}}{4}$$