Fiche 11 d'exercices : Représentation matricielle d'une application linéaire

1 Exercices d'assimilation du cours

Exercice 1 (Matrices de changement de bases)

Soit $\mathcal{B} = ((1,1,1),(1,2,1),(0,0,1))$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
1) Montrer que la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}$.
3) Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.
4) Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Expliciter la matrice des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 2 (Matrices de changement de bases)

Soit $\mathcal{B} = ((1,-1,1),(1,1,1),(1,0,-1))$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
1) Montrer que la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}$.
3) Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.
4) Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Expliciter la matrice des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 3 (Noyau d'une application linéaire obtenu à partir de sa matrice)

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et en donner une base.
2) Montrer que $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 4 (Image d'une application linéaire obtenue à partir de sa matrice)

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et en donner une base.

Exercice 5 (Application linéaire bijective)

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ une application admettant pour matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & z \\ 0 & z & 1 \\ 0 & 0 & x^2 - y^2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer l'ensemble des triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que f n'est pas bijective.

Exercice 6 (Effet d'un changement de bases sur la matrice d'un endomorphisme)

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{R}^2$ telles que la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ soit $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ telle que la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 7 (Rang d'une matrice)

Déterminer le rang de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 (Rang d'une matrice)

Déterminer le rang de la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ -4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 9 (Rang d'une matrice)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1. Déterminer le rang de J.

Exercice 10 (Rang d'une matrice)

Soit $n \geq 2$. Déterminer le rang de la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux situés sous la diagonale qui sont égaux à 1.

2 Exercices d'entraînement

3 Exercices d'approfondissement