Devoir surveillé 5 (26/03) : Espaces vectoriels

Exercice 1 (Famille de vecteurs)

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni des opérations usuelles.
Soient $u = (1,1,0)$, $v = (1,2,1)$ et $w = (2,3,0)$.
1) Montrer que la famille (u,v,w) est une famille libre.
2) Montrer en résolvant un système que la famille (u,v,w) est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
3) Déduire des deux questions précédentes que la famille (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
4) Soit $t = (1,1,1)$. Déterminer les coordonnées de t dans la base (u,v,w).
5) Redémontrer cette fois sans calcul et en vous appuyant uniquement sur le résultat de la question 1) que la famille (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 (Sous-espace vectoriel)

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni des opérations usuelles.
Soit $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, 2x + y + 3z = 0\right\}$.
1) Montrer à l'aide du théorème de caractérisation des sous-espaces vectoriels que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ en l'écrivant sous la forme d'un sous-espace vectoriel engendré.
3) Déduire de la question précédente une famille génératrice de F.
4) Donner une base de F.
5) Déduire de la question précédente la dimension de F.

Exercice 3 (Egalité de sous-espaces vectoriels en dimension finie)

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni des opérations usuelles.
Soient $u = (1,-1,1)$ et $v = (0,-1,2)$.
1) Montrer que la famille (u,v) est libre.
Soit $F = \mathrm{Vect}(u,v)$ le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs u et v.
2) Donner une base de F.
3) Déduire de la question précédente la dimension de F.
Soit $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z = 0\right\}$.
4) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
5) Donner une base de G.
6) Déduire de la question précédente la dimension de G.
L'objectif est maintenant de montrer de trois manières différentes que $F = G$.
7) a) Montrer par double inclusion que $F = G$.
7) b) Montrer que $F = G$ en utilisant un argument de dimension.
7) c) Bonus : Montrer à l'aide d'un pivot de Gauss que $F = G$.
8) En considérant G, compléter la famille (u,v) en une base de $\mathbb{R}^3$.