Chapitre 11

Représentation matricielle d'une application linéaire

Dans ce chapitre, on fait le lien entre les notions d'applications linéaires et de matrices. Ces dernières seront un outil de calcul très commode pour établir des propriétés sur les applications linéaires qu'elles représentent.

11.1 Matrice d'une famille finie de vecteurs dans une base

Définition 1 (Matrice d'un vecteur dans une base)

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ puis $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E. Soit $x \in E$.
La matrice de x dans la base $\mathcal{B}$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, est le vecteur colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont les composantes sont les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$. Autrement dit, si $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, alors : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

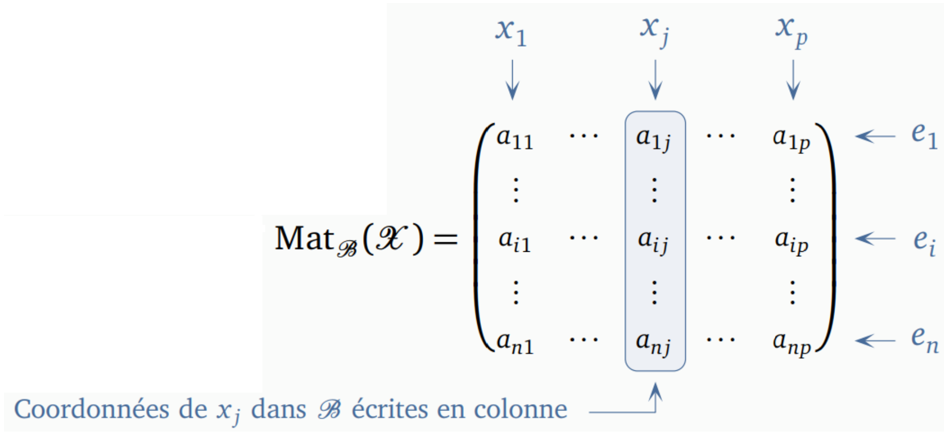
Remarque : Très souvent, on préférera écrire X la matrice de x dans la base $\mathcal{B}$.

Plaçons-nous dans $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B}_{\text{can}} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique.
Soit $u = (3, -4, 7) = 3 \times e_1 + (-4) \times e_2 + 7 \times e_3$. Alors, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(u) = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$.

La définition précédente se généralise sans peine à une matrice d'une famille finie de vecteurs.

Définition 2 (Matrice d'une famille finie de vecteurs dans une base)

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ puis $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E.
Soient $x_1, \ldots, x_p$, $p \geq 1$ vecteurs de E.
La matrice de la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ dans la base $\mathcal{B}$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_p)$, est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont la $j^{\text{ième}}$ colonne, $1 \leq j \leq p$, est constituée des coordonnées du vecteur x_j dans la base $\mathcal{B}$. Autrement dit, si on pose $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $x_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$, alors : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_p) = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$.



Etant donnés deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et un vecteur x, on peut se demander quel est le lien entre les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$. Pour répondre à cette question, on a besoin de définir la notion de matrice de passage d'une base à une autre.

Définition 3 (Matrice de passage d'une base à une autre)

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle puis $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, notée $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, est la matrice de la base $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

Remarque : La $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, $1 \leq j \leq \dim(E)$, est constituée des coordonnées du $j^{\text{ième}}$ vecteur de la base $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

Plaçons-nous dans $E = \mathbb{R}^2$. On note $\mathcal{B}_{\text{can}} = (e_1, e_2)$ la base canonique. On définit $u = (2,1) = 2e_1 + e_2$ et $v = (3,2) = 3e_1 + 2e_2$. Alors, la famille (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$ (en tant que famille libre de cardinal 2) que nous noterons $\mathcal{B}$.
⋆ La matrice de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}_{\text{can}}$, qui est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_{\text{can}}$ à la base $\mathcal{B}$, est donnée par :

$$P_{\mathcal{B}_{\text{can}}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

⋆ On peut également déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_{\text{can}}$. Comme $e_1 = 2u - v$ et $e_2 = -3u + 2v$, on en déduit que :

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On peut maintenant énoncer la formule de changement de bases.

Théorème 4 (Effet d'un changement de bases sur la matrice d'un vecteur)

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle puis $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Soit $x \in E$. On note X le vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$, X' le vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées du vecteur x dans la base $\mathcal{B}'$ et P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Alors,

$$X = PX'.$$

Remarques :
• De manière concise, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$.
• Attention, la formule précédente exprime les *anciennes coordonnées* de x en fonction des *nouvelles* à l'aide de la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

Proposition 5 (Propriétés des matrices de passage)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle.

- Produit de deux matrices de passage : Pour toutes bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ de E, $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}$.
- Matrice de passage d'une base à elle-même : Pour toute base $\mathcal{B}$ de E, $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = I_{\dim(E)}$.
- Inversibilité et inverse d'une matrice de passage : Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est inversible. De plus, $\left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.

Remarque : Le premier point est naturel et s'exprime ainsi : « le produit de la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ par la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}''$ est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}''$ ».

Le fait qu'une famille finie de vecteurs soit une base est codée dans sa matrice (dans une base).

Théorème 6 (Une famille finie de vecteurs est une base si et seulement si sa matrice est inversible.)

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ puis $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E.
Soient $x_1, \ldots, x_n$, n vecteurs de E.
La famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$ est inversible.

On a vu qu'à toute famille finie de vecteurs, on peut associer sa matrice dans une base. Réciproquement, toute matrice est-elle la matrice d'une famille finie de vecteurs dans une base ?

Proposition 7 (Toute matrice est la matrice de ses colonnes dans la base canonique.)

Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ puis $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On note $C_1, \ldots, C_p$ les colonnes de A et $\mathcal{B}_{\text{can}}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors,

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(C_1, \ldots, C_p).$$

On déduit du théorème précédent deux critères d'inversibilité d'une matrice.

Théorème 8 (Deux critères d'inversibilité d'une matrice)

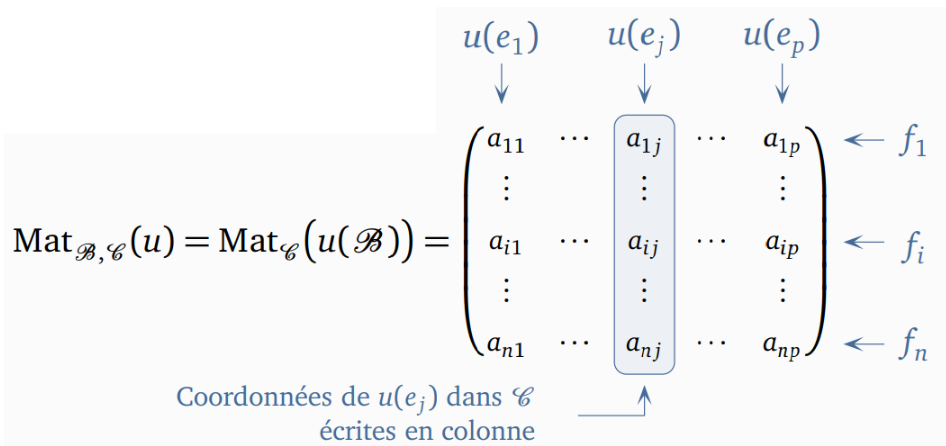
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- A est inversible si et seulement si la famille $(C_1, \ldots, C_n)$ des colonnes de A forme une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- A est inversible si et seulement si la famille $(L_1, \ldots, L_n)$ des lignes de A forme une base de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.

Remarque : On obtient le second point à partir du premier en considérant la transposée de la matrice A (puisque A est inversible si et seulement si ${}^tA$ est inversible).
- En particulier, toute matrice inversible est une matrice de passage. *C'est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base formée par les colonnes de cette matrice.*

11.2 Matrice d'une application linéaire

Définition 9 (Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases)

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies non nulles p et n. Soient $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leq j \leq p}$ une base de E et $\mathcal{C} = (f_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de F. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
La matrice de u relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$, est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont la $j^{\text{ième}}$ colonne, $1 \leq j \leq p$, est constituée des coordonnées du vecteur $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$. Autrement dit, si on pose $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $u(e_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i$, alors : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$.



Remarques :

• En fait, la matrice de u relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est la *matrice de la famille de vecteurs* $u(\mathcal{B})$ *dans la base* $\mathcal{C}$.
• Si $E = F$, alors u est un endomorphisme de E. Dans ce cas, on prend la même base $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée. La matrice de l'endomorphisme u relativement à la base $\mathcal{B}$ est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u)$ qu'on note plus simplement $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.
• Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle puis $\mathcal{B}$ une base de E. Alors, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) = I_{\dim(E)}$.
• Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ puis $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors, $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$.
On a aussi $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ où u est l'automorphisme de E envoyant la base $\mathcal{B}$ sur la base $\mathcal{B}'$.

Traitons un exemple.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f((x, y, z)) = (2x - z, -x + y + z)$. Comme $f(e_1) = 2e'_1 - e'_2$, $f(e_2) = e'_2$ et $f(e_3) = -e'_1 + e'_2$, la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La représentation matricielle d'une application linéaire permet de déterminer facilement les coordonnées de l'image d'un vecteur.

Théorème 10 (Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire)

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies non nulles. Soient $\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On note X le vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées du vecteur x dans la base $\mathcal{B}_E$, Y le vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées du vecteur $y = f(x)$ dans la base $\mathcal{B}_F$ et A la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. Alors,

$$Y = AX.$$

Remarque : L'égalité $Y = AX$ s'appelle l'écriture matricielle de l'application linéaire f. Elle s'écrit aussi : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x)$.

On explicite les matrices d'une combinaison linéaire d'applications linéaires, d'une composée d'applications linéaires et de l'inverse d'un automorphisme.

Proposition 11 (Propriétés des matrices d'applications linéaires)

Soient E, F et G trois $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies non nulles. Soient $\mathcal{B}_E$ une base de E, $\mathcal{B}_F$ une base de F et $\mathcal{B}_G$ une base de G.

- Matrice d'une combinaison linéaire : Soit $(f, g) \in (\mathcal{L}(E, F))^2$. Alors,

$$\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) + \beta \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(g).$$

- Matrice d'une composée : Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G)$. Alors,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f).$$

- Matrice de l'inverse : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors, f est un isomorphisme si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$ est inversible. Dans ce cas,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f^{-1}) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)\right)^{-1}.$$

Comme pour les matrices de familles de vecteurs, on énonce la formule de changement de bases pour la matrice d'une application linéaire puis pour celle d'un endomorphisme.

Théorème 12 (Effet d'un changement du couple de bases sur la matrice d'une application linéaire)

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies non nulles p et n. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E puis $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On note $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$, $Q = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, A la matrice de u relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et B la matrice de u relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$. Alors,

$$B = Q^{-1}AP.$$

Remarque : Les notations peuvent sembler lourdes au premier abord. Il convient de bien les appréhender. Pour faire simple, A est la matrice de u dans les anciennes bases, B est la matrice de u dans les nouvelles bases, P est la matrice de passage entre les deux bases de E et Q est la matrice de passage entre les deux bases de F.

Théorème 13 (Effet d'un changement de bases sur la matrice d'un endomorphisme)

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ puis $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, A la matrice de u relativement à la base $\mathcal{B}$ et B la matrice de u relativement à la base $\mathcal{B}'$. Alors,

$$B = P^{-1}AP.$$

Remarque : Les notations peuvent sembler lourdes au premier abord. Il convient de bien les appréhender. Pour faire simple, A est la matrice de u dans l'ancienne base, B est la matrice de u dans la nouvelle base et P est la matrice de passage entre les deux bases de E.

11.3 Application linéaire canoniquement associée à une matrice

On a vu qu'à toute application linéaire, on peut associer sa matrice dans un couple de bases. Réciproquement, toute matrice est-elle la matrice d'une application linéaire ?

Définition 14 (Application linéaire canoniquement associée à une matrice)

Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ puis $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
L'application linéaire canoniquement associée à A est l'application $f : \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), f(X) = AX.$$

Remarques :
• La terminologie « application linéaire canoniquement associée à A » est justifiée par le fait que la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est précisément A.
• Très souvent, on identifie $\mathbb{R}^n$ avec $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Néanmoins, il vaut bien mieux considérer des vecteurs colonnes.

On définit à présent de manière naturelle les notions de noyau et d'image d'une matrice.

Définition 15 (Noyau d'une matrice, image d'une matrice)

Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ puis $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

• Le noyau de A, noté $\text{Ker}(A)$, est le noyau de l'application linéaire canoniquement associée à A. Autrement dit,

$$\text{Ker}(A) = \left\{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), AX = 0\right\}.$$

• L'image de A, notée $\text{Im}(A)$, est l'image de l'application linéaire canoniquement associée à A. Autrement dit, en notant $C_1, \ldots, C_p$ les colonnes de A,

$$\text{Im}(A) = \text{Vect}(C_1, \ldots, C_p).$$

On en déduit de nouveaux critères d'inversibilité d'une matrice.

Théorème 16 (Caractérisations des matrices inversibles)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

• A est inversible.

• $\text{Ker}(A) = \{0\}$.

• $\text{Im}(A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

• A est inversible à gauche : il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B \times A = I_n$.

• A est inversible à droite : il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A \times B = I_n$.

Remarque : En cas d'inversibilité, $A^{-1} = B$.

11.4 Rang d'une matrice

On a déjà défini le rang d'une famille finie de vecteurs et le rang d'une application linéaire aux chapitres *Espaces vectoriels* et *Applications linéaires*. On étudie ici le rang d'une matrice et on précise les liens existant entre ces trois notions.

11.4.1 Définition et premières propriétés

Définition 17 (Rang d'une matrice)

Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ puis $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
Le rang de A, noté $\mathrm{rg}(A)$, est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

En reprenant les propriétés du rang d'une famille finie de vecteurs, on déduit immédiatement la proposition suivante.

Proposition 18 (Propriétés du rang d'une matrice en fonction de ses colonnes)

Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ puis $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On note $r = \mathrm{rg}(A)$.

• $r \leq \min(n,p)$.

• $r = p \iff$ la famille des colonnes de A est libre.

• $r = n \iff$ la famille des colonnes de A engendre $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

• $r = p = n \iff$ la famille des colonnes de A est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \iff A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

11.4.2 Calcul effectif du rang d'une matrice

On présente dans cette sous-partie un algorithme appelé méthode du pivot de Gauss permettant de déterminer le rang d'une matrice. On sait d'après le chapitre *Espaces vectoriels de dimension finie* que les transformations élémentaires effectuées sur les colonnes d'une matrice ne modifient pas son rang.

Proposition 19 (Les transformations élémentaires sur les colonnes ne modifient pas le rang d'une matrice.)

Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ puis $A = (C_1, \dots, C_p) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

• Permutation des colonnes : $\forall \sigma \in \mathcal{S}_p, \mathrm{rg}(C_1, \dots, C_p) = \mathrm{rg}(C_{\sigma(1)}, \dots, C_{\sigma(p)})$.

• Multiplication d'une colonne par un scalaire $\lambda \neq 0$: L'opération élémentaire $C_i \leftarrow \lambda C_i$ ne modifie pas le rang de A.

• Ajout à une colonne d'une combinaison linéaire des autres colonnes : L'opération élémentaire $C_i \leftarrow C_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j C_j$ ne modifie pas le rang de A.

Remarques :

• La transformation $C_i \leftarrow \sum_{j=1}^{p} \lambda_j C_j$ ne modifie pas le rang de A si $\lambda_i \neq 0$.

• On peut également supprimer une colonne qui est combinaison linéaire d'autres colonnes. C'est par exemple le cas si une colonne est nulle ou si deux colonnes sont égales.

Etant donnée une matrice A, la méthode du pivot de Gauss va consister à effectuer des transformations élémentaires sur les colonnes de A pour se ramener à une matrice dont le rang est évident.

Théorème 20 (Méthode du pivot de Gauss)

Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ puis $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$. Alors, il existe une matrice A', qui se déduit de A par une succession de transformations élémentaires, de la forme :

$$A' = \begin{pmatrix}
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
a_{\sigma(1)+1,1} & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & 1 & & & & & \\
\vdots & a_{\sigma(2)+1,2} & & & & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & & \\
 & & & 1 & & & \\
 & & & a_{\sigma(r)+1,r} & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & 0 & & 0
\end{pmatrix},$$

où $r \in [\![1,n]\!]$ et σ est une application strictement croissante de $[\![1,r]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$. De plus, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A') = r$.

Décrivons l'algorithme conduisant à cette matrice A'. Soient L_{i_0} la première ligne de A non nulle puis $a_{i_0,j}$ un coefficient non nul de cette ligne (on pose $\sigma(1) = i_0$). Quitte à permuter les colonnes, ce qui ne change pas le rang, on peut supposer qu'il s'agit de $a_{i_0,1}$. On effectue la transformation élémentaire $C_1 \leftarrow \dfrac{1}{a_{i_0,1}} C_1$ afin de faire apparaître un 1 en place $(i_0, 1)$. On annule alors les termes d'indice de ligne i_0 des colonnes $C_2, \dots, C_p$ grâce aux transformations élémentaires $C_j \leftarrow C_j - a_{i_0,j} C_1$. On réitère le raisonnement à partir de la deuxième ligne non nulle (si elle existe). On s'arrête dès qu'on ne trouve plus de lignes non nulles.

Il est essentiel de pratiquer la méthode du pivot de Gauss de nombreuses fois en exercices afin de bien l'assimiler.

11.4.3 Rang de la transposée d'une matrice

Théorème 21 (Invariance du rang par transposition)

Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ puis $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors, $\text{rg}(A) = \text{rg}({}^tA)$.

Le rang de A est donc aussi le rang de la famille de ses vecteurs lignes dans $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$. Ainsi, les propriétés du rang d'une matrice énoncées à partir de ses colonnes peuvent également être exprimées en fonction de ses lignes.

Proposition 22 (Propriétés du rang d'une matrice en fonction de ses lignes)

Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ puis $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On note $r = \text{rg}(A)$.

- $r \leq \min(n,p)$.
- $r = p \iff$ la famille des lignes de A engendre $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$.
- $r = n \iff$ la famille des lignes de A est libre.
- $r = p = n \iff$ la famille des lignes de A est une base de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R}) \iff A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.

On a vu précédemment que les transformations élémentaires sur les colonnes ne modifient pas le rang d'une matrice. Par transposition, c'est également le cas pour les transformations élémentaires sur les lignes.

Proposition 23 (Les transformations élémentaires sur les lignes ne modifient pas le rang d'une matrice.)

Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ puis $A = (L_1, \ldots, L_n) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- Permutation des lignes : $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, \operatorname{rg}(L_1, \ldots, L_n) = \operatorname{rg}(L_{\sigma(1)}, \ldots, L_{\sigma(n)})$.
- Multiplication d'une ligne par un scalaire $\lambda \neq 0$: L'opération élémentaire $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ne modifie pas le rang de A.
- Ajout à une ligne d'une combinaison linéaire des autres lignes : L'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j L_j$ ne modifie pas le rang de A.

Remarques :

- La transformation $L_i \leftarrow \sum_{j=1}^{n} \lambda_j L_j$ ne modifie pas le rang de A si $\lambda_i \neq 0$.
- On peut également supprimer une ligne qui est combinaison linéaire d'autres lignes. C'est par exemple le cas si une ligne est nulle ou si deux lignes sont égales.

11.4.4 Lien avec le rang d'une famille finie de vecteurs

Proposition 24 (Lien avec le rang d'une famille finie de vecteurs)

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle puis $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de $p \geq 1$ vecteurs de E. Alors,

$$\operatorname{rg}\Big(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_p)\Big) = \operatorname{rg}(u_1, \ldots, u_p).$$

Remarque : Le rang d'une famille finie de vecteurs peut-être obtenu en calculant le rang de la matrice de cette famille dans une base à l'aide de la *méthode du pivot de Gauss*. Cette dernière fournit également des relations de liaison entre ces vecteurs.

11.4.5 Lien avec le rang d'une application linéaire

Proposition 25 (Lien avec le rang d'une application linéaire)

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies non nulles. Soient $\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors,

$$\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}\Big(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)\Big).$$

Remarque : En effet, $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f(\mathcal{B}_E)) = \operatorname{rg}\Big(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(\mathcal{B}_E))\Big) = \operatorname{rg}\Big(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)\Big)$.