

INGINERIA PROCESELOR FIZICE

Eugenia Teodora Iacob Tudose

Introducere

Ingineria proceselor fizice reprezintă un domeniu fundamental al ingineriei chimice și de proces, având ca scop studierea și proiectarea proceselor care implică fenomene fizice precum transferul de masă, căldură și impuls. Acest curs oferă o bază teoretică solidă și abilități practice pentru înțelegerea și aplicarea principiilor esențiale care stau la baza funcționării echipamentelor industriale utilizate în separare, schimb de căldură, transport de fluide și alte operații unitare.

1. Fenomene de transfer – mecanisme, ecuații relevante în procesele industriale

1.1 Introducere. Concepte de bază

Proprietatea transportată, și anume impuls, energie, masă, specie moleculară, sunt concepte care se supun legilor de conservare conform cărora se pot transforma, dar cantitatea totală rămâne neschimbată (se conservă) și care stau la baza a numeroase procese fizice și chimice din industria chimică.

Legile de conservare pentru un fluid în curgere laminară, sau chiar turbulentă, pot fi sintetizate în forma generală:

\emptyset – proprietatea conservată (impuls, masă, energie, specie moleculară)

$$\left[\begin{array}{c} \text{Flux de } \emptyset \\ \text{intrat} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{Flux de } \emptyset \\ \text{ieșit} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Flux de } \emptyset \\ \text{generat} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{Flux de } \emptyset \\ \text{acumulat} \end{array} \right]$$

Fluxul reprezintă cantitatea de proprietate transportată în unitate de timp.

Caracteristici ale conceptelor de bază

La nivel microscopic sau de mecanism difuzional, transferul de proprietate este guvernat de așa-numitele *ecuații constitutive*, adică ecuații matematice ce descriu răspunsul unui sistem în condițiile existenței unor gradienti spațiali de proprietate (de exemplu, legea lui Newton, Legea lui Fourier, legea lui Fick).

Asemenea ecuații nu pot fi derivate din principii fundamentale, dar se supun constrângerii impuse de legea a II-a a termodinamicii conform căreia un sistem evoluează în sensul generării de entropie pozitivă. Coeficienții ce apar în asemenea ecuații sunt stabiliți experimental (η , λ , DAB).

Ecuțiile constitutive împreună cu ecuațiile de conservare și cu anumite condiții de univocitate (de exemplu, condiții la limită sau condiții inițiale) pot fi folosite pentru a caracteriza un sistem, obținându-se o soluție analitică a parametrului de interes (viteza, temperatură etc.).

De exemplu, putem calcula distribuția temperaturii într-un perete plan, unidimensional după direcția x , în regim staționar, reprezentat în figura 1.1, pornind de la ecuația diferențială a conductivității termice (în care s-a utilizat deja ecuația constitutivă, legea Fourier, a transferului de căldură conductiv) și anume:

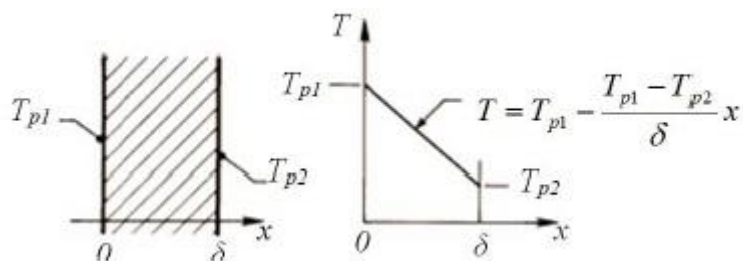


Figura 1.1 Transfer de căldură conductiv printr-un perete plan

Se pot face următoarele simplificări:

- în lipsa unei surse interne de căldură ($e_v^n=0$),
- în condițiile unui regim staționar, $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, ecuația de mai sus, devine:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \pm e_v^n$$

Sistemul este unidirecțional, după direcția x , deci $\frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} = 0$, astfel încât ecuația precedentă devine:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

Condițiile la limită în acest caz sunt:

$$\text{-la } x = 0, T = T_{p1}$$

$$\text{-la } x = \delta, T = T_{p2}$$

Se integrează ecuația de mai sus, după prima integrare, rezultând:

$$\frac{dT}{dx} = c_1$$

După a doua integrare, se obține:

$$T = c_1x + c_2$$

Constantele de integrare c_1 și c_2 se obțin din condițiile la limită:

$$c_2 = T_{p_1}$$

$$c_1 = -\frac{T_{p_1} - T_{p_2}}{\delta}, \quad T_{p_1} > T_{p_2}$$

Substituind constantele în ecuația ce dă distribuția temperaturii de-a lungul axei x , rezultă:

$$T = T_{p_1} - (T_{p_1} - T_{p_2}) \frac{x}{\delta}$$

Ecuția indică o dependență liniară a lui T funcție de x , așa cum este reprezentat și în Figura 1.1.

La nivel macroscopic, deci când avem mecanism de convectiv, transferul de proprietate prezintă următoarele caracteristici:

- este independent de sistemul de coordonate ales;
- este independent de natura substanței.

Pentru ca un sistem să fie complet caracterizat trebuie ca numărul de necunoscute să fie egal cu numărul de ecuații independente, în acest mod fiind posibilă stabilirea distribuției vitezelor, temperaturilor sau a concentrațiilor în acel sistem.

Profilele obținute sunt soluții teoretice sau analitice și permit design-ul și conducerea unui proces fără a fi necesar experimentul.

Numărul soluțiilor teoretice este mic comparativ cu numărul sistemelor ingineresti ce trebuie caracterizate.

Dacă ecuațiile ce caracterizează sistemul nu sunt disponibile și numărul de necunoscute este mai mare decât numărul de ecuații independente, obținerea unei soluții analitice nu e posibilă și se recurge la experimente pentru a obține corelări între mărimile ce descriu sistemul.

Aceste corelări sunt limitative, fiind aplicabile numai la geometria, condițiile la limită etc. caracteristice sistemului.

Notății. Definiții

x, y, z sunt variabile independente spațiale (sistem cartezian)

t este variabila timp, la fel independentă

φ este variabila dependentă spațio-temporal:

$$\varphi = \varphi(x, y, z, t)$$

și poate fi densitate, temperatura, concentrație etc.

1. *Regim staționar*, definit pentru o anumită locație spațială în care variabila dependentă φ nu variază în timp:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{x,y,z} = 0$$

Observație: Se folosește derivata parțială $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ deoarece variabila φ este dependentă de x, y, z.

Derivata totală $d\varphi = 0$ se folosește când φ este o constantă în câmpul de curgere (spațial), deci nu depinde de x, y, z:

$$d\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) dz$$

Variația unei mărimi fizice cu coordonata spațială (x, y sau z) se numește gradient (termenii încercuiți) în raport cu acea coordonată.

Derivata materială substanțială:

$$\frac{D\varphi}{dt} = \left(v_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + v_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

2. *Uniform* - este definit prin faptul că variabila φ nu este o funcție de poziție, la un anumit moment în timp, t:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_t = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_t = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_t = 0$$

3. *Echilibru* – Un sistem este în echilibru dacă condițiile de regim staționar și uniformitate sunt îndeplinite simultan.

Deci un sistem în stare de echilibru dacă mărimile ce îl caracterizează nu prezintă variații spațio-temporale.

1.2 Mecanisme de transfer ale proprietății

Impulsul, energia termică și speciile moleculare pot fi transferate prin două mecanisme, și anume, unul **molecular**, la scară microscopică, desfășurat din aproape în aproape, prin intermediul unor particule, iar celălalt, **convectiv**, la scară macroscopică, realizat odată cu masa fluidului în curgere. În transferul de căldură, întâlnim și transferul radiativ, realizat prin intermediul fotonilor sau undelor electromagnetice.

1.2.1 Transferuri de proprietate prin mecanism molecular

A. Transfer de impuls

Impulsul este definit ca forța ce acționează un anumit timp asupra sistemului, în final ajungându-se la produsul (masa x viteză).

Fluxul de impuls reprezintă cantitatea de impuls transferată în unitatea de timp, avînd semnificația fizică a unei forțe:

$$\frac{l}{t} = \frac{mv}{t} = ma = F, \quad \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$$

Fluxul specific de impuls reprezintă cantitatea de impuls transferată în unitatea de timp, prin unitatea de suprafață și are semnificația fizică a unei tensiuni:

$$l/(A \cdot t) = F \cdot t / (A \cdot t) = F/A = \tau, \quad \text{N/m}^2 = \text{Pa}$$

Transferul de impuls la scară microscopică este cuantificat de legea lui Newton, ecuația constitutivă fiind:

$$\tau_{yx} = -\eta \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

Ecuație conform căreia, fluxul specific de impuls sau tensiunea de forfecare este proporțional cu gradientul de viteză, constanta de proporționalitate fiind η coeficientul de vâscozitate al fluidului, de obicei măsurat sau tabelat. Unitățile de măsură corespunzătoare mărimilor sunt:

$$[\eta]_{SI} = \left[\frac{\tau_{yx}}{\partial v_x / \partial y} \right] = \frac{N \cdot s}{m^2} = Pa \cdot s = \frac{kg}{ms}$$

În alte sisteme de măsură, de exemplu CGS, s-a introdus ca unitate de măsură Poise-ul, notat cu P:

$$1P = 1 \frac{\text{dyne} \cdot s}{\text{cm}^2} = 1 \frac{g}{\text{cm} \cdot s}$$

Se pot deduce următorii factori de transformare între unitățile de măsură ale vâscozității dinamice din sistemele SI și CGS:

$$1 \frac{N \cdot s}{m^2} = 10P = 10^3 cP$$

sau:

$$1cP=10^{-2}P=10^{-3} Pa \cdot s$$

De obicei, vâscozitatea fluidelor este influențată de temperatură, pentru lichide aceasta scade cu creșterea temperaturii, iar pentru gaze, crește odată cu parametrul de stare. La gaze, la presiuni mari, vâscozitatea este influențată și de presiune. Vâscozitatea se poate determina experimental, citi din tabele funcție de temperatură sau calcula cu diverse ecuații din literatură..

Revenind la legea lui Newton, indicii x și respectiv, y indică direcția de curgere și respectiv, direcția de transmitere a impulsului care, datorită manifestării forțelor de frecare între volumele elementare de fluid determină o variație a vitezelor de deplasare a acestora pe direcție normală la direcția de curgere, așa cum este prezentat în figura 1, ce prezintă o curgere de tip Couette care poate fi întâlnită la convecția unui fluid între două plăci plane sau doi cilindri concentrici. Aceasta are loc numai cu transfer de impuls molecular. Fluidul cuprins între două plăci, dintre care una fixă și alta mobilă, care se deplasează cu viteza constantă $V=ct$. Într-o singură direcție, sub acțiunea forței tangențiale F este reprezentat în Figura 1.2(a). Volumele elementare din imediata vecinătate a plăcii vor fi antrenate cu aceeași viteză V , acestea la rândul lor antrenând volumele elementare superioare care însă se vor deplasa cu viteze mai mici datorită acțiunii forțelor de frecare. Astfel, pe direcția Oy , apare un gradient de viteză, ce indică transmiterea fluxului de impuls pe această direcție. Profilurile vitezelor, la diverse momente de timp $t=0$, t_1 , t_2 și la atingerea regimului staționar ($t=\infty$), când se atinge un profil liniar, sunt reprezentate în Figura 1.2 (b).

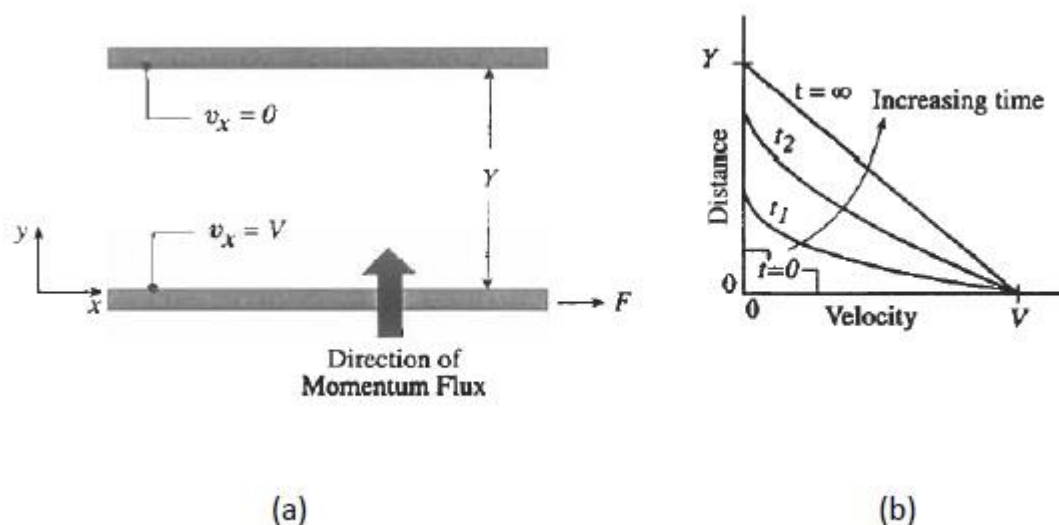


Figura 1.2 Profilul vitezelor la diverse momente de timp, în curgerea dintre două plăci paralele

Orice fluid care respectă legea lui Newton se numește fluid newtonian.

B. Transfer de căldură

Transferul de căldură molecular, numit și transfer conductiv, este guvernat tot de o lege constitutivă, și anume legea lui Fourier:

$$Q_{sy} = -\lambda A \frac{dT}{dy}$$

în care: q este fluxul specific de căldură, W/m^2

λ – coeficientul de conductivitate termică, W/mK

A – aria de transfer termic, m^2

$\frac{dT}{dy}$ este gradientul de temperatură după direcția de transmitere a fluxului termic, K/m .

Aceasta statutează că fluxul termic specific transferat prin mecanism conductiv este proporțional cu gradientul de temperatură. Transferul are loc în sensul scăderii temperaturii, adică a unui gradient de temperatură negativ, de aici și apariția semnului “-” în ecuație.

Coeficientul de conductivitate termică, λ , are valori diferite funcție de natura materialului, de starea de agregare, de temperatură și presiune. Pentru gaze, coeficientul de conductivitatea termică are valori între 0,006 – 0,6 W/mK , crescând odată cu temperatura, pentru lichide între 0,007-0,7 W/mK , variind invers cu temperatura, cu excepția apei și glicerinei. În multe cazuri, inginerul chimist trebuie să mărească sau să micșoreze transferul de căldură până la un anumit nivel, fapt realizabil adesea prin selectarea corectă a valorilor conductivităților termice corespunzătoare diverselor materiale. Dintre materialele utilizate mai des în aplicațiile ingineresti în vederea îmbunătățirii transferului termic, se pot menționa *materialele metalice* cu valori ale coeficienților de conductivitate termică cuprinse în intervalul 8,7 - 458 W/m^2K , cum ar fi cuprul pur cu o conductivitate termică de aproape 400 W/m^2K și aluminiul, cu o conductivitate termică de 203 W/m^2K .

Limitarea transferului de căldură dar și a temperaturii suprafețelor este realizabilă prin utilizarea *materialelor izolante* caracterizate de valori mici ale coeficienților de conductivitate cuprinse în intervalul 0,02-0,12 W/mK . De exemplu, aerul sau orice gaz poate fi un bun izolator în special dacă se evită convecția în masa acestuia în timpul transferului de căldură. Vidul este un alt excelent izolator. Există o mare varietate de materiale izolante atât din punct de vedere al structurii, a costului cât și a temperaturilor maxime la care pot fi folosite. De obicei, cu cât temperatura de lucru a utilajului ce urmează a fi izolat este mai mare, cu atât conductivitate termică și costul materialului izolant vor fi mai mari. Printre materialele izolante utilizate des în industria chimică se pot număra vata de sticlă cu o varietate de densități ce se reflectă în valori diferite ale conductivităților termice cuprinse între 0,03 și 0,06 W/mK , poliuretanul cu o conductivitate termică

joasă de aproximativ 0,02 W/mK și o temperatură maximă de operare de 120°C, precum și perlita cu o temperatură maximă de operare de 980°C și conductivități termice cuprinse între 0,05 și 1,5 W/mK. *Materialele refractare* cu coeficienți de conductivitate termică în intervalul 0,12-11 W/mK, au caracteristici relativ diferite, ca de exemplu cărămida pe bază de oxid de aluminiu cu o conductivitate termică de 2 W/mK și o temperatură de lucru de aproximativ 1760°C.

În Figura 1.3 (a), este reprezentat un sistem de 2 plăci plane, între care există un fluid. Cea superioară are temperatura T_0 și cea inferioară, temperatura $T_1 > T_0$, astfel încât datorită distribuției neuniforme a temperaturii, apare un transfer de flux de căldură, pe direcția Oy, între plăci. Profilurile temperaturilor, la diverse momente de timp $t=0, t_1, t_2$ și respectiv, la atingerea regimului staționar ($t=\infty$), când se atinge un profil liniar, sunt reprezentate în Figura 1.3 (b).

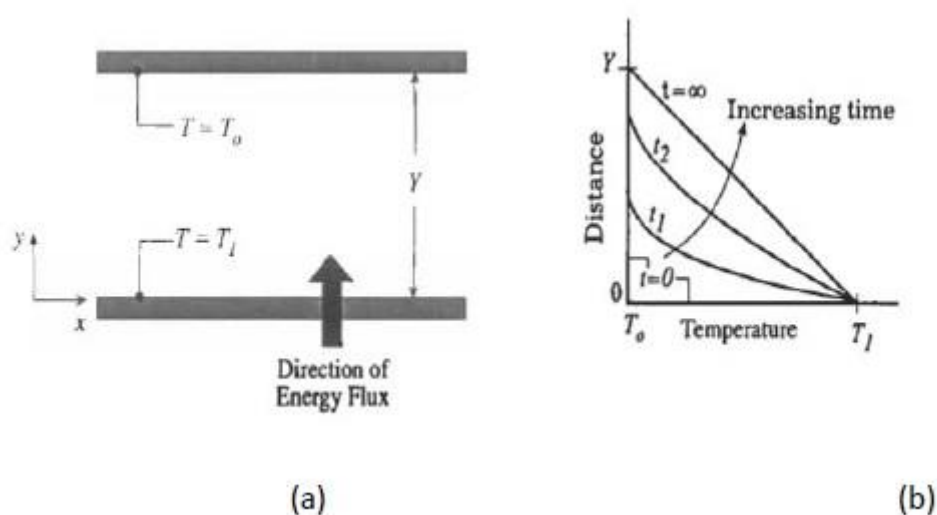


Figura 1.3 Profilul temperaturilor la diverse momente de timp, la transferul conductiv într-un perete plan

C. Transfer de masă

Transferul de masă la scară microscopică, numit și difuzie moleculară, este cuantificat de următoarea ecuație constitutivă:

$$N_A = -D_{AB} A \frac{dc_A}{dy}$$

numită și legea lui Fick care stabilește legătura dintre fluxul specific de specie moleculară, N_A (kg A/s), A aria de transfer de masă și gradientul de concentrația al acesteia, $\frac{dc_A}{dy}$ ($\frac{kgA}{m^3}$), în condiții izoterme și izobare, constanta de proporționalitate fiind coeficientul de difuzie al speciei A în specia B, D_{AB} (m^2/s).

Semnul minus apare, ca și în celelalte legi constitutive mai sus-menționate, deoarece transferul de specie are loc în sensul scăderii concentrației acesteia, adică în sensul unui gradient de concentrație negativ.

Coeficientul de difuziune moleculară reprezintă o proprietate a sistemului care se determină experimental, în caz contrar, se poate calcula utilizând o serie de ecuații din literatură ce au o bază teoretică sau sunt semi-empirice.

La gaze, valorile D_{AB} sunt cuprinse între 10^{-4} și 10^{-3} m²/s și pot fi considerate independente de concentrația componentilor. La lichide, valorile sunt de 10^{-9} – 10^{-10} m²/s și depind de natura componentilor, de temperatură, de vâscozitate și de concentrație.

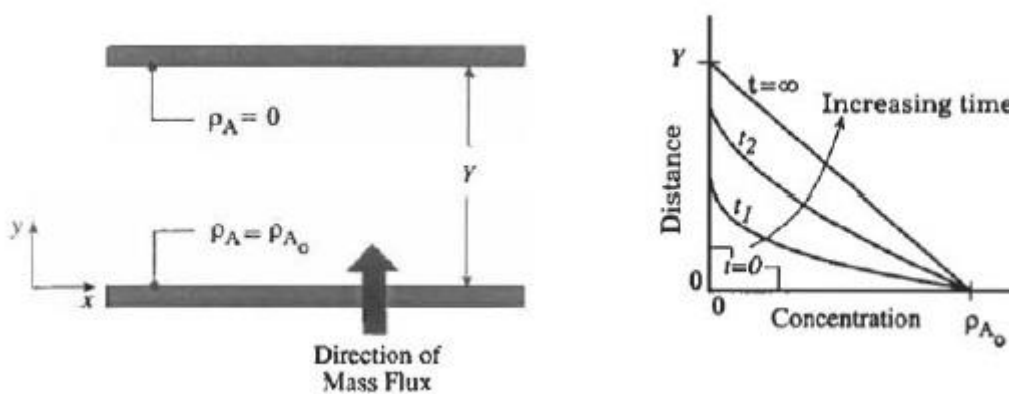


Figura 1.4 Profilul concentrațiilor speciei moleculare A la diverse momente de timp, între plăci paralele

Considerând același fluid cuprins între două plăci, cea inferioară prin care poate difuza specia moleculară A, de concentrație c_{A0} , și cea superioară, la care concentrația este 0, se va constata o difuzie a fluxului de specie moleculară A de la placa inferioară spre cea superioară, așa cum este indicat în Figura 1.4 (a). Profilurile concentrațiilor, la diverse momente de timp $t=0$, t_1 , t_2 și respectiv, la atingerea regimului staționar ($t=\infty$), când se atinge un profil liniar, sunt reprezentate în Figura 1.4 (b).

1.3 Analogia transferurilor de proprietatea la scară microscopică

Deși ecuațiile constitutive sunt asemănătoare, ele nu sunt perfect analoge, proprietățile de transport având unități de măsură diferite. Aceste ecuații pot fi exprimate în următoarele forme echivalente:

- legea Newton:

$$\tau_{yx} = -\eta \frac{dv_x}{dy}$$

$$\tau_{yx} = -\frac{\eta}{\rho} \frac{d(\rho v_x)}{dy}$$

$$\tau_{yx} = -\vartheta \frac{d(\rho v_x)}{dy}, \quad \rho = \text{ct.}$$

τ_{yx} - flux specific de impuls

$$\langle \vartheta \rangle_{SI} = \text{m}^2/\text{s}$$

$$\rho v_x = \frac{mv_x}{V} = \frac{I}{V} \quad \text{concentrație de impuls}$$

$$\frac{d(\rho v_x)}{dy} \quad \text{gradientul potențialului de concentrație}$$

-legea lui Fourier:

$$q_y = -\lambda \frac{dT}{dy}$$

$$q_y = -\frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{d(\rho c_p T)}{dy}$$

$$q_y = -a \frac{d(\rho c_p T)}{dy}$$

$\langle a \rangle_{SI} = \text{m}^2/\text{s}$ coeficient de difuzivitate termică

q_y - flux specific termic, W/m^2

$$\rho c_p T = \frac{mc_p T}{V} = \frac{Q}{V} \quad \text{concentrație de energie termică}$$

$$\frac{d(\rho c_p T)}{dy} \quad \text{- gradient al concentrației de energie termică}$$

- legea Fick:

$$n_A = -D_{AB} \frac{dc_A}{dy}$$

n_A - flux specific de specie moleculară A, $\text{kgA}/\text{m}^2\text{s}$

$$\langle D_{AB} \rangle_{SI} = \text{m}^2/\text{s}$$

c_A - concentrația de specie moleculară A, fracție densimetrică masică, kgA/m^3

$$\frac{dc_A}{dy} \quad \text{- gradientul de concentrație}$$

Ecuțiile constitutive au aceeași formă generală, conform căreia:

$$\phi = -\Lambda \frac{\partial \pi}{\partial l}$$

Fluxul specific molecular = difuzivitatea x gradientul de concentrație (gradient forță motoare)

Tabel 1.1 Valori ale difuzivității pentru diverse substanțe

Difuzivitate	$\nu \cdot 10^6$	$a \cdot 10^6$	$D \cdot 10^6$
Aer	13,7	18,8	10,1
Oxigen	13,5	18,6	18,9
Oxid de Azot	7	8,9	10,4

1.4. Transferuri de proprietate prin mecanism convectiv

Mecanismul convectiv ce implică transportul de proprietate de către masa fluidului în curgere, este cuantificat prin intermediul unor ecuații ce corelează cantitatea sau fluxul de impuls, energie termică sau specie moleculară cu forța motrice a transferului și aria de transfer, așa cum se prezintă mai jos.

-transfer de impuls (convecție):

$$M_m = \rho A v \Leftrightarrow m = \frac{M_m}{A} = \rho v$$

unde M_m – flux masic (debit masic), kg/s

A - suprafața de transfer (perpendiculară pe direcția transferului de proprietate), m^2

v - viteza medie, m/s

ρ - densitatea fluidului, kg/m^3

m - flux specific de masă, kg/m^2s

-transfer de energie termică:

$$Q = \alpha A \Delta T \Leftrightarrow q = \alpha \Delta T$$

unde: Q- flux termic, j/s=W

α - coeficient individual de transfer termic, W/m^2K

A- suprafața de transfer, m^2

ΔT – potențialul transferului, forța motrice a transferului, grad

Q – flux termic specific, W/m^2K

-transfer de specie moleculară:

$$N_A = kA\Delta c_A \Leftrightarrow n_A = k\Delta c_A$$

unde: N_A - flux de specie molecular, $\text{kgA}/\text{m}^2\text{s}$ ($\text{kmoliA}/\text{m}^2\text{s}$)

k – coeficient individual de transfer de masă, de ex. $\frac{\text{kgA}}{\text{m}^2\text{s} \frac{\text{kgA}}{\text{kgamestec}}}$

A – aria de transfer de masă, m^2

Δc_A – forța motrice a transferului

n_A – flux masic specific al speciei A, $\text{kmoli}/\text{m}^2\text{s}$

1.5. Analogia între transferurile de proprietate prin mecanism convectiv

Relația analogă pentru cele trei fenomene poate fi scrisă astfel:

$$F = \varphi A \pi$$

unde: F - fluxul de proprietate transferat prin mecanism convectiv

φ - coeficientul de proporționalitate

A - suprafața de transfer potențialul transferului

π - fluxul specific de proprietate

În ecuația transferului de impuls poate fi pus în evidență potențialul transferului plecând de la ecuația căderii de presiune pentru o conductă de lungime L și diametru d , în cazul curgerii laminare:

$$\Delta p = \lambda \frac{L}{d} \rho \frac{v^2}{2}$$

în care coeficientul de frecare la curgerea prin conductă este considerat: $\lambda = \frac{64}{Re}$

obținându-se: $\Delta p = 32 \frac{\eta L}{\rho d^2} \rho v$,

respectiv: $\rho v = \frac{d^2 \rho}{32 \eta L} \Delta p$

Ecuația debitului specific poate fi scrisă în forma:

$$m = \rho v = \frac{d^2 \rho}{32 \eta L} \Delta p = \frac{\Delta p}{\frac{32 \eta L}{d^2 \rho}}$$

Numărătorul expresiei are semnificația forței motrice a transferului, în timp ce numitorul expresiei are semnificația *rezistenței* transferului, prin analogie cu legea lui Ohm:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{\text{tensiunea}}{\text{rezistența}}$$

Analog se pot scrie și celelalte două legi de convecție a energiei termice și speciei moleculare A:

$$q = \frac{\Delta T}{\frac{1}{\alpha}}$$

Numitoarele ultimelor două expresii au semnificația *rezistenței* la transferul de energie termică și respectiv, specie moleculară A. Punerea în formă analogă legii lui Ohm evidențiază clar analogia transferurilor de proprietate convective.

1.6 Analogia între ecuațiile diferențiale de transfer

Toate ecuațiile diferențiale cunoscute au fost deduse aplicând principiul conservării proprietății unui volum elementar considerat, și anume: fluxul de proprietate acumulat în volumul V este egal cu diferența între fluxurile de proprietate intrate și ieșite prin mecanism convectiv și difuzional plus fluxul de proprietate generat de sistemul de forțe și de efectele fizice și chimice.

1. **Ecuația diferențială a continuității** (de conservare a masei totale) descrie variația densității într-un punct fix situat în masa fluidului în curgere (regim laminar, sistem izoterm, curgere netaționară)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

2. **Ecuațiile diferențiale ale transferului de impuls** – ne dau distribuția vitezelor în masa unui fluid în curgere

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = - \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = - \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z$$

3. **Ecuatia diferențială a energiei** pentru fluide newtoniene ($\rho, \eta, \lambda = \text{ct}$) descrie distribuția temperaturii în masă a fluidului în curgere în care apar mecanismele de transfer conductiv și convectiv.

$$\begin{aligned} \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \\ = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + 2\eta \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] \\ + \eta \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 \right] + \dot{e}_v \end{aligned}$$

4. **Ecuatia diferențială a difuziunii convective** (de conservare a masei speciei moleculare A) ne da distribuția concentrației speciei moleculare A, într-un fluid în curgere în care ambele mecanisme de transfer de masă, difuzia moleculară și convectivă, sunt întâlnite.

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = - \left[\frac{\partial (c_A v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (c_A v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (c_A v_z)}{\partial z} \right] + D_{AB} \left(\frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2} \right) \pm r_A$$

Demonstrațiile ecuațiilor diferențiale bazate pe principiul conservării amintit mai sus, reliefează analogia dintre transferurile de proprietate, realizate prin ambele mecanisme, remarcându-se:

- un termen ce corespunde fluxului acumulat
- termeni ce corespund fluxului transferat convectiv (la scară macroscopică)
- termeni ce corespund fluxului difuzional (la scară microscopică)
- termen corespunzător fluxului generat pe suprafață
- termen corespunzător fluxului generat în volum

Toți acești termeni sunt evidențiați simbolic mai jos.

- transferul de impuls:

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = - \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + \rho g_x$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = - \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) + \rho g_y$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) + \rho g_z$$

- transfer de energie termică

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \left[2\eta \left(\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right) + \eta \left(\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 \right) \right] + e_v$$

- transfer de specie moleculara A

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = - \left[\frac{\partial (c_A v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (c_A v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (c_A v_z)}{\partial z} \right] + D_{AB} \left(\frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2} \right) + r_A$$

Toate aceste ecuații prezentate în coordonate carteziane pot fi deduse sau trecute în alte coordonate, cilindrice sau sferice, funcție de geometria spațiului în care are loc transferul. Utilizarea coordonatelor potrivite simplifică din punct de vedere matematic rezolvarea ecuațiilor. Ecuațiile în coordonate carteziane, cilindrice și sferice sunt prezentate în tabelele de mai jos.

**Ecuatiile diferențiale ale transferului de proprietate
în coordonate carteziene, cilindrice, sferice**

Ecuatia continuității

Coordonate	Ecuatia continuității
Rectangulare	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$
Cilindrice	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(\rho r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$
Sferice	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial(\rho r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial(\rho v_\theta \cdot \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial(\rho v_\phi)}{\partial \phi} = 0$

Ecuatiile transferului de impuls

Coordonate	Compo- nenta	Ecuatia impulsului
Rectangulare	x	$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$
	y	$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y$
	z	$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z$

Ecuatiile transferului de impuls – continuare

Cilindrice	r	$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r\tau_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} \right] - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r$
	\theta	$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \cdot \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = \left[\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial(r^2\tau_{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial z} \right] - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta$
	z	$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z} \right] - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z$
Sferice	r	$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 - v_\phi^2}{r} \right) = \left[\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial(r^2\tau_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial(\tau_{r\theta} \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial\tau_{r\phi}}{\partial \phi} - \frac{\tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi}}{r} \right] - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r$

Coordonate	Componenta	Ecuatia impulsului
Sferice	\theta	$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \cdot \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \operatorname{ctg} \theta}{r} \right) = \left[\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial(r^2\tau_{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial(\tau_{\theta\theta} \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial\tau_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{\tau_{r\theta}}{r} - \frac{\tau_{\phi\phi} \operatorname{ctg} \theta}{r} \right] - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta$
	\phi	$\rho \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \cdot \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\theta v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\phi \operatorname{ctg} \theta}{r} \right) = \left[\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial(r^2\tau_{r\phi})}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\tau_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial\tau_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\tau_{r\phi}}{r} + \frac{2 \operatorname{ctg} \theta}{r} \tau_{\theta\phi} \right] - \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial p}{\partial \phi} + \rho g_\phi$

Ecuatia difuziunii convective

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = - \left[\frac{\partial(C_A v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(C_A v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(C_A v_z)}{\partial z} \right] + D_{AB} \left[\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} \right]$$

unde: $\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} = \nabla^2 C_A$ este operatorul lui Laplace

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + v_x \frac{\partial C_A}{\partial x} + v_y \frac{\partial C_A}{\partial y} + v_z \frac{\partial C_A}{\partial z} + C_A \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) =$$

$$= D_{AB} \nabla^2 C_A.$$

sau:

Ecuatiile transferului de energie

Coordonate rectangulare

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = - \left[\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right] -$$

$$- T \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - \left\{ \tau_{xx} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v_y}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} \right\} -$$

$$- \left\{ \tau_{xy} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \tau_{xz} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \tau_{yz} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \right\}.$$

Coordonate cilindrice

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r q_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right] -$$

$$- T \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - \left\{ \tau_{rr} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \tau_{\theta\theta} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + \right.$$

$$+ \tau_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} \left. \right\} - \left\{ \tau_{r\theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] + \tau_{rz} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) + \right.$$

$$\left. + \tau_{\theta z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \right\}.$$

Coordonate sferice

$$\begin{aligned} \rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \cdot \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) = & - \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 q_r) + \right. \\ & + \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (q_\theta \sin \theta) + \left. \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \frac{\partial q_\varphi}{\partial \varphi} \right] - T \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \right. \\ & + \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \left. \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) - \left\{ \tau_{rr} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \right. \\ & + \tau_{\theta\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) + \tau_{\varphi\varphi} \left(\frac{1}{r \cdot \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r} \right) \left. \right\} - \\ & - \left\{ \tau_{r\theta} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right) + \tau_{r\varphi} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} \right) + \right. \\ & \left. + \tau_{\theta\varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r} v_\varphi \right) \right\}. \end{aligned}$$

Toate ecuațiile diferențiale amintite pot fi scrise și pentru curgerea turbulentă cu mențiunea că viteza, temperatura și concentrația speciei moleculare A, au valori instantanee și sunt scrise ca o sumă între mărimea mediată temporală și mărimea fluctuantă, de exemplu:

$$v_x = \widehat{v}_x + v'_x$$

Ținându-se cont că medierea temporală a marimilor fluctuante este zero se pot stabili ecuațiile diferențiale de conservare ale proprietății în regim turbulent, un exemplu în acest sens fiind prezentat mai jos pentru ecuațiile transferului de impuls în regim turbulent.

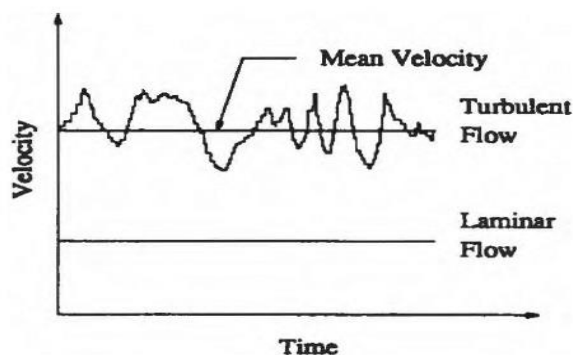


Figura 1.5 Fluctuații de viteză și viteza medie temporală, într-un punct din masa fluidului aflat în curgere turbulentă

$$\rho \left[\frac{\partial \hat{v}_x}{\partial t} + \hat{v}_x \frac{\partial \hat{v}_x}{\partial x} + \hat{v}_y \frac{\partial \hat{v}_x}{\partial y} + \hat{v}_z \frac{\partial \hat{v}_x}{\partial z} \right] = \eta \left[\frac{\partial^2 \hat{v}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}_x}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \left[\frac{\partial \hat{\tau}_{xx}^{(t)}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\tau}_{yx}^{(t)}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\tau}_{zx}^{(t)}}{\partial z} \right]$$

$$\rho \left[\frac{\partial \hat{v}_y}{\partial t} + \hat{v}_x \frac{\partial \hat{v}_y}{\partial x} + \hat{v}_y \frac{\partial \hat{v}_y}{\partial y} + \hat{v}_z \frac{\partial \hat{v}_y}{\partial z} \right] = \eta \left[\frac{\partial^2 \hat{v}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}_y}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} + \left[\frac{\partial \hat{\tau}_{xy}^{(t)}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\tau}_{yy}^{(t)}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\tau}_{zy}^{(t)}}{\partial z} \right]$$

$$\rho \left[\frac{\partial \hat{v}_z}{\partial t} + \hat{v}_x \frac{\partial \hat{v}_z}{\partial x} + \hat{v}_y \frac{\partial \hat{v}_z}{\partial y} + \hat{v}_z \frac{\partial \hat{v}_z}{\partial z} \right] = \eta \left[\frac{\partial^2 \hat{v}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}_z}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} + \left[\frac{\partial \hat{\tau}_{xz}^{(t)}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\tau}_{yz}^{(t)}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\tau}_{zz}^{(t)}}{\partial z} \right]$$

1.7 Analogii ale transferurilor de proprietate

Analogia dintre transferul de impuls, transferul de căldură și transferul de masă permite abordarea unui fenomen greu de analizat cantitativ prin intermediul unui alt fenomen, mai simplu de studiat, care are loc în condiții similare. În acest mod, rezultatele teoretice sau experimentale obținute pentru fenomenul mai accesibil pot fi utilizate pentru caracterizarea celui mai complex.

Astfel, coeficienții individuali de transfer de masă pot fi determinați folosind formulele aplicabile coeficientului de frecare din curgerea fluidelor sau relațiile utilizate pentru calcularea coeficienților individuali de transfer de căldură.

Aplicarea acestor analogii este însă condiționată de respectarea unor ipoteze restrictive. Astfel, proprietățile fizice ale fluidelor sunt considerate constante, în sistem nu are loc generarea sau consumul de masă și/sau energie, energia disipată prin frecare este neglijabilă, transferul de masă și/sau energie nu influențează profilul vitezelor fluidului, energia radiantă nu este emisă sau absorbită în sistem.

Analogia Reynolds

Această analogie permite corelarea rezistenței la curgere, rezistenței la transfer termic și rezistenței la transfer de substanță, evidențiind relația dintre coeficientul de frecare $\lambda=4f$ (f factorul lui Fanning), coeficientul individual de transfer termic α și coeficientul individual de transfer de

masă k la curgerea turbulentă a unui fluid printr-o conductă în care au loc atât transfer de căldură cât și de masă cu peretele acesteia.

Se consideră că un volum de fluid este transportat de turbioane din masa fluidului către sau către suprafața solidă (sau către interfața dintre faze), fără a se amesteca cu porțiunile de fluid cu care vine în contact. La interfață, acest volum de fluid atinge instantaneu starea de echilibru, iar proprietățile sale capătă valorile corespunzătoare echilibrului. Concomitent, un volum echivalent de fluid este deplasat dinspre peretele conductei sau interfață către masa de fluid, având proprietăți corespunzătoare mediului pe care îl traversează.

Astfel, într-un fluid în mișcare, se realizează simultan transferul de impuls, transferul de căldură dacă există un gradient de temperatură și transferul de masă dacă există un gradient de concentrație. În această analiză, influența substratului limită laminar și a celui turbulent este considerată nesemnificativă și deci, negliabilă.

În cazul coeficienților de transfer, s-au stabilit următoarele relații pe baza similitudinii dintre ecuații ce descriu transporturi de proprietate diferite, din care poate fi exprimată lungimea caracteristică:

$$\begin{aligned} \frac{f}{2} Re &= \frac{L}{\delta} \Rightarrow L = \frac{1}{2} f \cdot Re \cdot \delta \\ \alpha &= \frac{\lambda}{\delta_t} \Rightarrow Nu = \frac{\alpha L}{\lambda} = \frac{L}{\delta_t} \Rightarrow L = Nu \cdot \delta_t \\ k &= \frac{D_{AB}}{\delta_c} \Rightarrow Sh = \frac{kL}{D_{AB}} = \frac{L}{\delta_c} \Rightarrow L = Sh \cdot \delta_c \end{aligned}$$

rezultând egalitățile:

$$\frac{1}{2} f \cdot Re \cdot \delta = Nu \cdot \delta_t = Sh \cdot \delta_c$$

Această similitudine a fost stabilită de Reynolds. În condițiile în care grosimile celor trei straturi limită pot fi considerate egale,

$$\delta = \delta_t = \delta_c$$

această condiție conduce la egalitățile:

$$\frac{1}{2} f \cdot Re = Nu = Sh$$

respectiv:

$$\frac{f}{2} = \frac{Nu}{Re} = \frac{Sh}{Re}$$

ecuație cunoscută și ca analogia Reynolds.

Relatia poate fi folosită cu erori de maxim 35% numai în cazul gazelor, pentru care este respectată egalitatea grosimilor celor trei straturi limita. Relația nu se aplică la lichide.

Analogia Chilton-Colburn

Chilton și Colburn propun o metodă pentru deducerea și folosirea analogiei între transferul de impuls, căldură și masă de specie moleculară. Se consideră ecuația criterială cunoscută:

$$Nu = 0,023Re^{0,8} Pr^{0,23}$$

Se împarte ecuația la produsul $RePr$, obținându-se:

$$St = \frac{Nu}{RePr} = 0,023Re^{-0,2} Pr^{-0,67}$$

unde St este criteriul Stanton definit ca în ecuația de mai sus, respectiv: $St = \frac{\alpha}{\rho c_p v}$, iar Pr este

criteriul Prandtl definit de: $Pr = \frac{\eta c_p}{\lambda}$, un criteriu al proprietăților fluidului.

Pentru coeficientul de frecare, λ , relația de calcul este:

$$\lambda = 0,184Re^{-0,2}$$

$$Re^{-0,2} = \frac{\lambda}{0,184}$$

de unde:

Ecuația de mai sus pentru criteriul St se poate scrie și în forma:

$$StPr^{0,67} \equiv StPr^{\frac{2}{3}} = 0,023Re^{-0,2}$$

Chilton și Colburn au reprezentat grafic $StPr^{0,67}$ funcție de $Re^{-0,2}$ și au observat că această dependență grafică este aproximativ aceeași cu dependența coeficientului de frecare $\lambda=f(Re)$ din diagrama Moody.

Înlocuind ecuația pentru $Re^{-0,2}$ în ultima ecuație:

$$J_H = 0,023 \frac{\lambda}{0,184}$$

sau:

$$J_H = \frac{\lambda}{8}$$

unde s-a folosit notația: J_H numit factorul J al transferului de căldură.

În mod analog se obține factorul J_D al transferului de masă:

$$J_D = \frac{Sh}{ReSc} Sc^{2/3}$$

Din studiul diverselor procese de transfer de căldură și masă, s-a stabilit:

$$J_H = J_D = \frac{\lambda}{8}$$

numită *analogia Chilton – Colburn*, valabilă pentru $Re > 10000, 0,7 < Pr < 160, L/d > 60$.

2. Ecuații diferențiale aplicate în ingineria proceselor fizice: de la modelare la soluții practice

Capitolul prezentat în continuare se concentrează pe deducerea criteriilor de similitudine și a ecuațiilor criteriale prin analiza ecuațiilor diferențiale care descriu transferurile de proprietate (impuls, căldura și specie moleculară). Se analizează soluții analitice și numerice ale ecuațiilor diferențiale, sunt abordate metode de modelare matematică a proceselor fizice, alături de deducerea relațiilor adimensionale esențiale pentru înțelegerea și scalarea fenomenelor, cu accent pe aplicarea acestora în contextul sistemelor reale.

2.1 Deducerea criteriilor de similitudine din ecuațiile diferențiale

Ecuațiile diferențiale ce descriu transferul de proprietate pot fi utilizate pentru obținerea criteriilor de similitudine după ce acestea au fost trecute într-o formă adimensională. În acest scop se reduce ecuația diferențială la o formă dimensională generalizată, omițând semnele diferențiale și constantele numerice după care, termenii obținuți se împart la un același termen tocmai pentru a obține o formă adimensională.

Criteriile transferului de impuls

Pentru transferul de impuls se pornește de la ecuațiile diferențiale Navier-Stokes. Se consideră forma ecuației valabilă pentru curgerea izotermă a unui fluid newtonian incompresibil. Deoarece cele trei ecuații au aceeași formă, pentru deducerea criteriilor de similitudine este suficientă considerarea uneia dintre acestea, de exemplu ecuația corespunzătoare direcției x:

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) - \rho g_x + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{3} \eta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) = 0$$

După omiterea din ecuație a semnelor diferențiale și a constantei numerice, se obține ecuația dimensională generalizată:

$$\left[\frac{\rho v}{t}\right] + \left[\frac{\rho v^2}{l}\right] - [\rho g] + \left[\frac{\Delta p}{l}\right] - \left[\frac{\eta v}{l^2}\right] = 0$$

I II III IV V,VI

în care l este o lungime caracteristică. Termenii V și VI din ecuația diferențială sunt identici și în ecuația dimensională generalizată s-au inclus împreună. Prin împărțirea unui termen la un alt termen, din această ecuație se obțin criteriile corespunzătoare de similitudine. În general, se recomandă ca valorile criteriului rezultat să fie supraunitare. În ecuația de mai sus, nu există o regulă generală legată de care termen să fie deîmpărțit și care împărțitor.

Din ecuație rezultă patru criterii de similitudine și anume:

- numărul Reynolds - este o măsură a raportului între forțele inerțiale și cele de vâscozitate, care guvernează curgerea:

$$\text{II/V} \quad \frac{\rho v^2}{l} \frac{l^2}{\eta v} = \frac{\rho v l}{\eta} = Re$$

- numărul Froude este o măsură a raportului dintre forțele inițiale și cele gravitaționale:

$$\text{II/III} \quad \frac{\rho v^2}{l} \frac{1}{\rho g} = \frac{v^2}{lg} = Fr$$

- numărul lui Euler este raportul între forțele create de presiune și forțele inerțiale:

$$\text{IV/II} \quad \frac{\Delta p}{l} \frac{l}{\rho v^2} = \frac{\Delta p}{\rho v^2} = Eu$$

- numărul Strouhal este un criteriu al regimului nestaționar, fiind mai puțin utilizat în modelare:

$$\text{II/I} \quad \frac{\rho v^2}{l} \frac{t}{\rho v} = \frac{vt}{l} = Sr$$

Funcția criterială obținută în acest caz (nu se ia în considerare criteriul Strouhal), poate fi scrisă în forma:

$$f(Re, Fr, Eu)=0$$

sau ecuația criterială corespunzătoare:

$$Eu = C Re^m Fr^n$$

utilizată în special în operațiile de amestecare a mediilor lichide. Coeficientul C și exponenții m și n sunt determinați experimental pentru diverse tipuri de agitatoare. Deși ecuațiile criteriale neglijează anumite variabile, semnificația criteriilor de similitudine reiese clar în evidență.

Criteriile transferului de căldură

Transferul de căldură în convecție forțată poate fi caracterizat cu ajutorul ecuațiilor diferențiale ale transferului de impuls și a ecuației diferențiale a energiei. Din ecuația de conservare a impulsului s-au dedus anterior criteriile Reynolds ($Re = \frac{\rho v l}{\eta}$), Froude ($Fr = \frac{v^2}{gl}$) și Euler ($Eu = \frac{\Delta p}{\rho v^2}$). Pe lângă acestea, se pot deduce următoarele criterii pornind de la ecuația diferențială Fourier-Kirchhoff :

$$\rho c_p \left[v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right] - \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

În formă dimensională generalizată, ecuația anterioară devine:

$$\left[\frac{\rho c_p v T}{l} \right] - \left[\frac{\lambda T}{l^2} \right] + \left[\frac{\rho c_p T}{t} \right] = 0$$

I II III

Termenii ecuației au ca unități de măsură W/m^3 . Ne interesează ca unul dintre aceștia să poată fi scris funcție de coeficientul convectiv, α , astfel termenul III poate fi exprimat în forma:

$$\frac{\rho c_p T}{t} = \frac{Q}{l^3 t}$$

cu $Q = \alpha l^2 T t$, încât ecuația (1.170) devine:

$$\left[\frac{\rho c_p v T}{l} \right] - \left[\frac{\lambda T}{l^2} \right] + \left[\frac{\alpha T}{l} \right] = 0$$

I II III

Raportul I/II reprezintă așa numitul *criteriu a lui Péclet al transferului de căldură*, $Pé$, și este o măsură a raportului între căldura transferată convectiv și cea transmisă conductiv.

$$\frac{\rho c_p v T}{l} \frac{l^2}{\lambda T} = \frac{\rho c_p v l}{\lambda} = Pé$$

Raportul III/II conduce la obținerea *criteriului lui Nusselt*, Nu , ce reprezintă o măsură a raportului între căldura transferată prin toate mecanismele (convectiv și conductiv) și căldura transferată prin mecanism conductiv:

$$\frac{\alpha T}{l} \frac{l^2}{\lambda T} = \frac{\alpha l}{\lambda} = Nu$$

l este o lungime caracteristică a spațiului în care are loc transferul de căldură.

Forma generală a funcției criteriale a transferului de căldură convectiv conținând criteriile deduse din ecuațiile de conservare ale impulsului și energiei este dată de ecuația:

$$f(Nu, Re, Pe, Fr, Eu)=0$$

Criteriul Euler se poate exprima funcție de criteriul Reynolds, iar criteriul Froude se substituie de obicei printr-un criteriu specific convecției libere numit *criteriul Grashof*, definit de relația:

$$Gr = \frac{Re^2 \beta \Delta T}{Fr} = \frac{\rho^2 g l^3 \beta \Delta T}{\eta^2}$$

cu β coeficient de dilatare termică a volumului, K^{-1} și ΔT diferența de temperatură sub acțiunea căreia se modifică densitatea fluidului, generându-se convecția liberă.

Un criteriu alternativ pentru convecția liberă este criteriul Rayleigh definit de ecuația:

$$Ra = Gr Pr = \frac{g \beta (T_p - T_\infty) l^3}{\nu a}$$

cu ν vâscozitatea cinematică și a coeficientul de difuzivitate termică.

Criteriul Péclet conține viteza de deplasare a fluidului ca și criteriul Reynolds și, de aceea, se preferă de obicei înlocuirea lui cu un alt criteriu al proprietăților, *criteriul Prandtl*, definit de:

$$Pr = \frac{Pe}{Re} = \frac{c_p \eta}{\lambda}$$

Având în vedere aceste observații, funcția criterială a transferului de căldură devine:

$$f(Nu, Re, Pr, Gr, l_1^0, l_2^0, \dots, l_n^0)=0$$

unde $l_1^0, l_2^0, \dots, l_n^0$ sunt criteriile geometrice caracteristice spațiului de curgere.

Ecuația criterială corespunzătoare funcției criteriale date de ecuația anterioară este:

$$Nu = C Re^m Pr^n Gr^p (l_1^0)^r (l_2^0)^p \dots (l_n^0)^q$$

unde C , respectiv, m, n, p, r, q sunt constanta și respectiv, exponenții caracteristici fiecărei ecuații criteriale ce se aplică unui anumit sistem. Aceștia se determină experimental, așa cum se detaliază în continuare.

Această ecuație poate lua forme particulare funcție de stările de agregare ale fluidelor, de sensul de modificare al stării de agregare, de tipul de convecție, de tipul de regim de curgere, de geometria spațiului de curgere etc.

De reținut că în cazul convecției libere, ecuația precedentă ia forma particulară:

$$Nu = C Pr^n Gr^p (l_1^0)^r (l_2^0)^p \dots (l_n^0)^q$$

iar în cazul curgerii forțate (convecția liberă ne semnificativă), aceeași ecuație devine:

$$Nu = C Re^m Pr^n (I_1^0)^r (I_2^0)^p \dots (I_n^0)^q$$

Determinarea valorilor constantelor și coeficienților ce intervin în ecuația criterială prin metoda experimentală presupune investigarea unui număr de parametri ce iau diverse valori, urmată de reprezentarea rezultatelor pe o scară logaritmică când se obține o liniarizare a datelor. De exemplu, în cazul curgerii forțate de-a lungul unei plăci plane, se pot varia viteza de curgere a fluidului, lungimea plăcii și natura fluidului. Dacă placa este încălzită la flux constant folosind o rezistență electrică alimentată cu o sursă de tensiune U și intensitate a curentului I , se poate calcula o valoare medie a coeficientului individual convectiv, α , din relația:

$$U \cdot I = \alpha A (T_p - T_\infty)$$

dacă se măsoară temperatura peretelui, T_p , temperatura fluidului, T_∞ și suprafața prin care are loc transferul termic, A . În acest caz, ecuația criterială generală este dată de:

$$Nu = C Re^m Pr^n$$

În formă logaritmică, ecuația anterioară devine:

$$\log Nu = \log C + m \log Re + n \log Pr$$

iar reprezentarea grafică a datelor experimentale în coordonatele $\log Nu$ - $\log Re$ și respectiv $\log Nu$ - $\log Pr$, v. figura 1.6, permite obținerea valorilor exponenților m și respectiv, n . Cunoscând valorile Nu , Re , Pr , m și n , se poate determina constanta C . Cu cât numărul de date experimentale este mai mare, cu atât precizia determinării constantei și exponenților este mai mare.

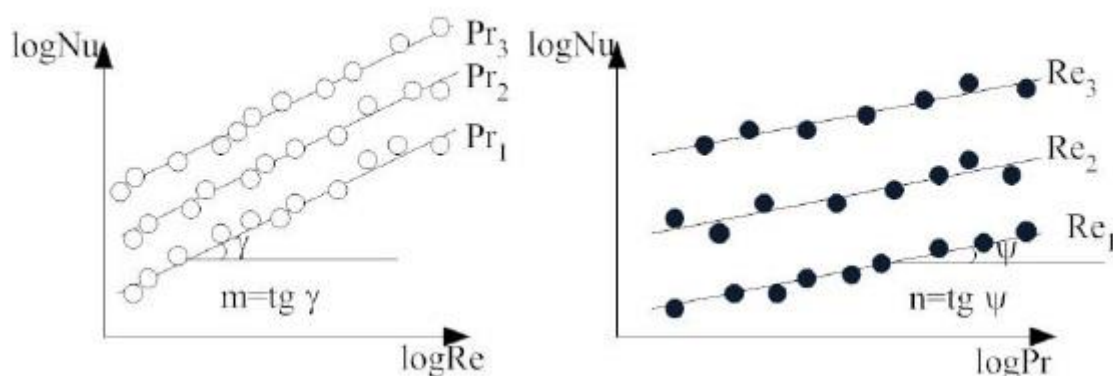


Figura 1.6 Reprezentarea ecuației criteriale generale a transferului de căldură convectiv pentru determinarea exponenților

Deși în multe cazuri, proprietățile fluidului variază, ele sunt considerate constante, fiind determinate la o temperatură medie a filmului $(T_p + T_\infty) / 2$. O altă alternativă, este calculul

proprietăților la T_∞ , urmată de introducerea unei corecții în ecuația criterială în forma unui raport, de exemplu $(Pr/Pr_p)^s$ sau $(\eta/\eta_p)^s$, cu Pr și η calculați la temperatura masei de fluid, T_∞ , și respectiv, Pr_p și η_p calculați la temperatura peretelui.

Ecuțiile criteriale propuse în literatură pot fi aplicate unui sistem în limitele indicate, cu respectarea strictă a parametrilor pentru care acestea au fost propuse.

Criteriile transferului de specie moleculară

Pentru transferul de masă al speciei moleculare A, se pornește de la ecuațiile diferențiale ale transferului de impuls și de la ecuația diferențială a difuziunii convective. Aceasta din urmă are forma:

$$\left[v_x \frac{\partial c_A}{\partial x} + v_y \frac{\partial c_A}{\partial y} + v_z \frac{\partial c_A}{\partial z} \right] - D_{AB} \left(\frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial c_A}{\partial t} = 0$$

După aducerea ecuației în formă dimensională generalizată se obține:

$$\underbrace{\left[\frac{cv}{l} \right]}_I + \underbrace{\left[\frac{cD}{l^2} \right]}_II + \underbrace{\left[\frac{c}{t} \right]}_III = 0$$

Ultimul termen, III, reprezintă cantitatea de component unitatea de volum de fluid, în unitatea de timp, adică N/l^3t . această cantitate poate fi exprimată funcție de coeficientul individual k , , ecuația anterioară devenind:

$$\underbrace{\left[\frac{cv}{l} \right]}_I + \underbrace{\left[\frac{cD}{l^2} \right]}_II + \underbrace{\left[\frac{kc}{l} \right]}_III = 0$$

Prin raportarea termenilor I și III la II, se obține:

- Criteriul Sherwood este o măsură a raportului între cantitatea de masă transferată prin toate mecanismele și cea prin mecanism molecular:

$$III/II \quad \frac{kc}{l} \frac{l^2}{cD} = \frac{kl}{D} = Sh$$

- Criteriul Péclet al transferului de masă prezintă raportul între masa transferată prin mecanisme convectiv și masă transferată prin mecanism molecular:

$$I/II \quad \frac{cv}{l} \frac{l^2}{cD} = \frac{vl}{D} = Pé$$

Funcția criterială completă a transferului de masă conține și criteriile curgerii, Re și criteriul Grashof datorat convecției libere induse de gradientii de concentrație, Gr' , luând forma:

$$f(Sh, Pé, Re, Gr')=0$$

Raportul $Pé/Re = \eta/D = Sc$ este un criteriu al proprietăților numit numărul Schmidt, astfel încât funcția criterială devine:

$$f(Sh, Sc, Re, Gr) = 0$$

Ecuția criterială corespunzătoare transferului de masă este:

$$Sh = C Re^m Sc^n$$

2.2. Aplicații ale ecuațiilor diferențiale de conservare în regim staționar și izoterm

Se urmărește obținerea distribuției vitezelor în secțiuni de diverse geometrii, pornind de la ecuațiile diferențiale ale transferului de impuls.

Curgerea printr-o conductă cilindrică

Se consideră o conductă orizontală, de secțiune circulară uniformă, de rază R , prin care curge un fluid în regim izoterm, fluidul fiind incompresibil, cu comportare newtoniană. Curgerea are loc după direcția z , este stabilizată, în regim staționar.

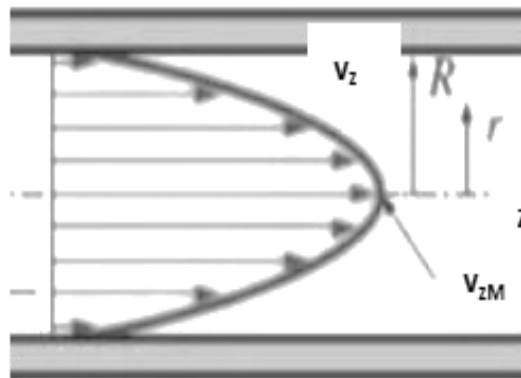


Figura 1.7 Distribuția vitezelor într-o conductă circulară, în regim laminar

Se pornește de la ecuațiile diferențiale ale transferului de impuls după direcția z :

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right] - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z$$

în care se fac următoarele simplificări:

- regim staționar: $\frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$

- zona curgerii stabilizate: $\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$

- viteza după direcția de curgere z , variază pe direcție radială, dar nu și azimutală:

$$\frac{\partial v_z}{\partial \theta} = 0$$

$$\tau_{rz} \sim \frac{\partial v_z}{\partial r} \neq 0$$

$$\tau_{\theta z} \sim \frac{\partial v_z}{\partial \theta} = 0$$

$$\tau_{zz} \sim \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

-acelerația gravitațională nu acționează după direcție orizontală, $g_z=0$

Ecuția simplificată este:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r\tau_{rz})}{\partial r}$$

iar variația liniară a gradientului de presiune în lungul conductei se poate scrie:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\Delta p}{L}$$

încât ecuația diferențială precedentă devine:

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{1}{r} \frac{d(r\tau_{rz})}{dr}$$

Integrând, se obține:

$$\int_0^{\tau_{rz}} d(r\tau_{rz}) = \frac{\Delta p}{L} \int_0^r r dr$$

$$\tau_{rz} = \frac{\Delta p \cdot r}{2L}$$

ceea ce demonstrează o distribuție liniară a efortului tangential pe direcție radială.

Dacă fluidul este newtonian, se înlocuiește efortul tangential cu expresia dată de legea lui Newton și se obține:

$$\int_0^{v_z} dv_z = -\frac{\Delta p}{2\eta L} \int_R^r r dr$$

integrând finit ecuația precedentă, rezultă expresia:

$$v_z = -\frac{\Delta p}{4\eta L}(r^2 - R^2)$$

$$v_z = \frac{\Delta p R^2}{4\eta L} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right]$$

ceea ce indică o distribuție parabolică a vitezei, expresia care poate fi pusă și în forma:

$$v_z = v_{zM} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right]$$

Debitul volumic de fluid ce curge prin conducta circulară, ținând cont de distribuția neuniformă a vitezei pe direcție radială este:

$$M_v = 2\pi \int_0^R r v_z dr$$

După substituția vitezei în ecuația de mai sus și integrare pentru debit obține ecuația:

$$M_v = \frac{\pi \Delta p R^2}{8\eta L} = v_{zmax} \frac{\pi R^2}{2}$$

Viteza medie a fluidului rezultă prin raportarea debitului volumic la aria secțiunii de curgere:

$$\bar{v}_z = \frac{M_v}{\pi R^2}$$

$$\bar{v}_z = \frac{1}{2} v_{zM}$$

Curgerea între plane paralele

Astfel de geometrii sunt caracteristice unor aparate folosite pentru măsurători reologice sau unor tipuri de utilaje.

În acest caz, se deosebesc următoarele situații:

- curgerea are loc între cele două plăci, una dintre ele fiind fixă, cealaltă deplasându-se pe direcția z, cu o viteză constantă V, distanța dintre plane rămânând constantă, egală cu H. Impulsul se transferă numai prin mecanism molecular (curgerea Couette);

- curgerea dintre cele două plăci fixe se realizează sub acțiunea unui gradient de presiune, mecanismele de transfer fiind molecular și convectiv;

- curgerea are loc sub acțiunea unui gradient de presiune, dar și prin antrenare datorită deplasării unuia dintre planuri cu o viteză constantă în sensul de curgere.

-cele două plane orizontale paralele și imobile sunt situate la distanță, între ele curgând un fluid newtonian sub acțiunea unui gradient de presiune.

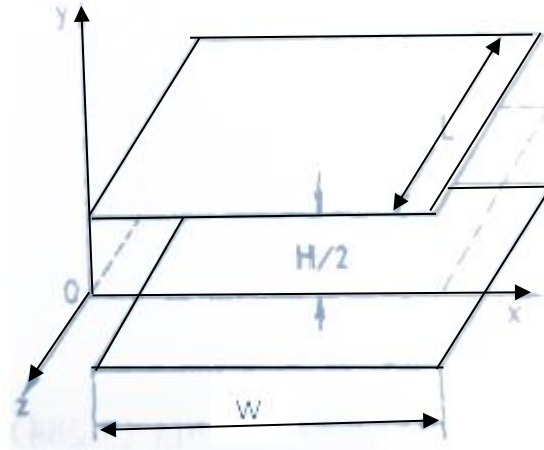


Figura 1.8 Curgerea între plane paralele

Considerăm cazul în care curgerea are loc numai sub acțiunea unui gradient de presiune. Regimul este staționar, în regiunea stabilizată a curgerii.

Ecuția diferențială a transferului de impuls după direcția z , în coordonate carteziene, este:

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z$$

- regim staționar: $\frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$

- zona curgerii stabilizate: $\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$

- nu există curgere după direcțiile x sau y , v_x, v_y

Aceasta se simplifică la forma:

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial z}$$

Gradientul de presiune în direcția de curgere este constant:

$$- \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\Delta p}{L}$$

astfel încât ecuația devine:

$$\frac{d\tau_{yz}}{dy} = \frac{\Delta p}{L}$$

După prima integrare rezultă:

$$\tau_{yz} = \frac{\Delta p}{L} y + c_1$$

în care $c_1=0$ pentru $y=0$ și $\tau_{yz}=0$. Deci, ecuația de distribuție a efortului unitar devine:

$$\tau_{yz} = \frac{\Delta p}{L} y$$

pentru orice fel de fluid. Dacă fluidul e newtonian:

$$-\eta \int dv_z = \frac{\Delta p}{L} \int y dy$$

După a doua integrare, se obține:

$$v_z = -\frac{\Delta p}{2\eta L} y^2 + c_2$$

unde c_2 se deduce din condiția la limită:

$$\text{pentru } y=H/2, v_z = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{\Delta p H^2}{8\eta L}$$

Distribuția vitezelor în spațiul dintre planele paralele va avea forma:

$$v_z = \frac{\Delta p}{2\eta L} \left(\frac{H^2}{4} - y^2 \right)$$

$$v_z = \frac{\Delta p H^2}{8\eta L} \left[1 - \left(\frac{2y}{H} \right)^2 \right]$$

Pentru $y=0$, viteza de curgere are valoarea maximă:

$$v_{zM} = \frac{\Delta p H^2}{8\eta L}$$

Debitul de fluid care curge pe direcția z , prin secțiunea dreptunghiulară cu laturile L și W este dat de integrala:

$$M_v = 2W \int_0^{H/2} v_z dy$$

După substituirea distribuției vitezelor și integrare, rezultă:

$$M_v = \frac{\Delta p W H^3}{12\eta L}$$

Viteza medie de curgere se obține din raportul debit pe suprafața secțiunii de curgere: \bar{v}

$$\bar{v}_z = \frac{M_v}{WH} = \frac{2}{3} v_{zM}$$

Curgerea lichidelor în filme subțiri

Filmele de lichid subțire, în curgere pe o frontieră solidă, se întâlnesc în numeroase aplicații precum condensarea vaporilor, reacții în fază lichidă, absorbție, evaporare, rectificare etc.

La debite foarte mici, filmul de lichid este lipsit de valuri, în schimb, odată cu creșterea debitului, deși regimul se menține laminar, pe suprafața filmului apar valuri. La numere Reynolds suficient de mari, de peste 1600, curgerea devine turbulentă și amplitudinea valurilor crește.

Se consideră o zonă din filmul de lichid stabilizat, situată la o distanță suficient de mare de marginile frontierei solide, în care se pot neglija efectele de capăt. Sistemul este izoterm, regimul de curgere este staționar. Sistemul de coordonate rectangulare se alege astfel încât să fie atașat de suprafața liberă a filmului, curgerea având loc după direcția z.

Se pleacă de la ecuația diferențială a transferului de impuls după direcția z, în care s-au realizat următoarele simplificări:

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z$$

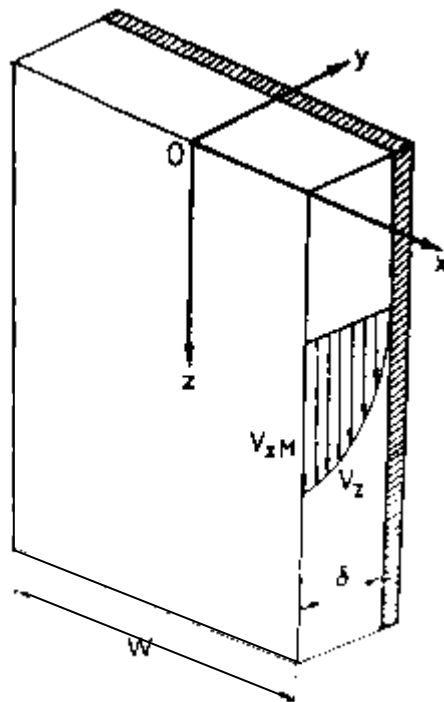


Figura 3 Film subțire vertical

- regim staționar: $\frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$

- zona curgerii stabilizate: $\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$

- nu există curgere după direcțiile x sau y , $v_x, v_y = 0$

-presiunea mediului ambiant ce acționează pe suprafața filmului este constantă, deci $\frac{d\tau_{yz}}{dy} =$

ρg_z .

Ecuția diferențială devine:

$$\frac{d\tau_{yz}}{dy} = \rho g_z$$

Se substituie tensiunea după modelul Ostwald –de-Waele (model reologic de forma):

$$\tau_{yz} = -\eta \left(\frac{dv_z}{dy} \right)^n$$
$$\left\{ d \left[\left(\frac{dv_z}{dy} \right)^n \right] = -\frac{\rho g_z}{\eta} dy \right\}$$

După prima integrare, se obține:

$$\left(\frac{dv_z}{dy} \right)^n = -\frac{\rho g_z}{\eta} y + c_1$$

Constanta de integrare $c_1=0$ rezultă din condiția de limită $\frac{dv_z}{dy} = 0$ pentru $y=0$.

Expresia vitezei locale după a doua integrare:

$$\left\{ dv_z = -\left(\frac{\rho g_z}{\eta} \right)^{1/n} y^{1/n} dy \right\}$$
$$v_z = -\left(\frac{n}{n+1} \right) \left(\frac{\rho g_z}{\eta} \right)^{\frac{1}{n}} y^{\frac{(n+1)}{n}} + c_2$$

Constanta de integrare pentru $y=\delta$ și $v_z=0$, va avea forma:

$$c_2 = \left(\frac{n}{n+1} \right) \left(\frac{\rho g_z}{\eta} \right)^{1/n} \delta^{\frac{n+1}{n}}$$

După substituția constantei c_2 , se obține distribuția vitezei pe grosimea filmului de lichid:

$$v_z = \left(\frac{n}{n+1}\right) \left(\frac{\rho g_z}{\eta}\right)^{\frac{1}{n}} \left[\delta^{\frac{n+1}{n}} - y^{\frac{n+1}{n}}\right]$$

Sau:

$$v_z = \left(\frac{n}{n+1}\right) \left(\frac{\rho g_z \delta^{n+1}}{\eta}\right)^{\frac{1}{n}} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]$$

Viteza maximă de curgere se obține pe suprafața filmului de lichid, pentru $y=0$:

$$v_{zM} = \left(\frac{n}{n+1}\right) \left(\frac{\rho g_z \delta^{n+1}}{\eta}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Debitul volumic de lichid ce curge în film pe peretele plan, vertical, de grosime W , va fi dat de expresia:

$$M_v = W \int_0^{\delta} v_z dy$$

în care, dacă se substituie expresia vitezei, integrându-se, se obține:

$$M_v = W \left(\frac{n}{2n+1}\right) \left(\frac{\rho g}{\eta}\right)^{1/n} \delta^{2(n+1)/n}$$

Viteza medie de curgere a filmului este dată de raportul între debit și suprafața secțiunii transversale:

$$\bar{v}_z = \left(\frac{n}{2n+1}\right) \left(\frac{\rho g_z}{\eta}\right)^{\frac{1}{n}} \delta^{\frac{n+1}{n}}$$

Pentru $n=1$, se obține distribuție vitezelor într-un film de lichid newtonian.

3. FENOMENE ÎN REGIM NESTAȚIONAR

3.1 Curgeri bifazice

În ingineria chimică, curgerile bifazice sunt des întâlnite sub forma unor amestecuri lichid gaz sau lichid vapori, solid gaz sau solid lichid. Acestea sunt caracteristice condensatoarelor evaporatoare lor, reactoarelor, sistemelor de combustie, transportului pneumatic al solidelor.

Curgerile bifazice sunt extrem de complexe datorită formei diferite în care cele două fluide pot exista în interiorul unei conducte, respectiv datorită tipului de regim de curgere. Orientarea conductei joacă un rol important în tipul de regim de curgere apărut datorită rolului jucat de forța gravitațională și de diferența de densitate dintre cele două fluide.

Definiții și mărimi caracteristice

Ne vom referi în special la amestecuri bifazice de tip gaz- lichid, M_m fiind debitul masic de amestec bifazic, dat de suma debitului fazei gazoase și a debitului fazei lichide:

$$M_m = M_{mg} + M_{ml}$$

ce se deplasează printr-o conductă de arie transversală A .

Principalele mărimi ce caracterizează un amestec bifazic sunt:

- titlul masic definit ca raportul dintre debitul masic gazos raportat la debitul masic al amestecului bifazic: $x = \frac{M_{mg}}{M_m}$

- entalpia amestecului bifazic:

$$i = (1-x)i_l + xi_v = i_l + x(i_v - i_l) = i_l + xr$$

- fracțiunea volumetrică de fază gazoasă din amestec definită ca fracțiunea de volum a amestecului ocupată de faza gazoasă, respectiv fracțiunea de secțiune transversală a conductei:

$$\varepsilon_g = \frac{V_g}{V} = \frac{A_g}{A}$$

- viteza reală a fazei gazoase și respectiv, lichide:

$$u_g = \frac{M_{vg}}{A_g} = \frac{M_{vg}}{A\varepsilon_g}$$

$$u_l = \frac{M_{vl}}{A_l} = \frac{M_{vl}}{A(1 - \varepsilon_g)}$$

-viteza superficială a fazei gazoase și respectiv, lichide, definite ca și cum numai faza gazoasă ar ocupa întreaga secțiune a conductei:

$$U_g = \frac{M_{vg}}{A} = \frac{M_{mg}}{A\rho_g} = \frac{xM_m}{A\rho_g} = \frac{\dot{m}x}{\rho_g}$$

$$U_l = \frac{M_{vl}}{A} = \frac{M_{ml}}{A\rho_l} = \frac{(1-x)M_m}{A\rho_l} = \frac{\dot{m}(1-x)}{\rho_l}$$

-alunecarea fazelor, S, definită ca raportul între viteza de deplasare a fazei gazoase și a fazei lichide:

$$S = \frac{u_g}{u_l} = \frac{U_g(1 - \varepsilon_g)}{U_l\varepsilon_g}$$

Din ecuația precedentă, rezultă expresia de calcul a fracțiunii volumetrice a fazei gazoase:

$$\varepsilon_g = \frac{x}{x + S(1-x)\rho_g/\rho_l}$$

-densitatea amestecului bifazic:

$$\rho = (1 - \varepsilon_g)\rho_l + \varepsilon_g\rho_g$$

-flux specific volumetric total:

$$\frac{M_v}{A} = \frac{M_{vg} + M_{vl}}{A} = U_g + U_l \equiv U$$

Tipuri de curgere bifazică

Tipuri de curgere bifazică în conducte verticale

În funcție de raportul între debitul de gaz și lichid, deosebim (v. Figura 3.1):

- Curgerea în bule- faza lichidă este continua și conține faza joasă dispersată sub formă de bule. Poate avea coalescență acestora.

- Curgerea de tip piston ("slug", cu dopuri)- caracteristica de bază constă în prezența bulelor de formă alungită, bule Taylor, ce ocupă aproape întreaga secțiune de curgere a conductei și care sunt separate de zone de lichid în care sunt antrenate bule mai mici de gaz. Dacă distanța dintre două bule Taylor consecutive nu este suficient de mare, atunci cea de a doua bulă accelerează și are loc coalescența cu prima, rezultând o bulă Taylor mai mare. Regimul de curgere slug este puternic nestationar.

- Curgerea de tip intermitent, cu dopuri instabile("churn")- la creșterea vitezei de curgere a fazei gazoase apare distorsionarea și dispersia bulelor de gaz de formă alungită, curgerea având un puternic caracter nestationar. Dacă conducta are secțiunea transversală mică, regimul devine oscilator, dacă conducta are secțiune mai mare, atunci trecerea de la regimul de curgere de tip piston la cel de tip anular, se realizează treptat.

- Curgere anulară, cu antrenare de porțiuni de fază lichida ("wispy") - la creșterea debitului de lichid, concentrația picăturilor de lichid antrenate în masa fazei gazoase care curge prin centrul conductei crește, astfel încât acestea încep să coalesceze în interiorul conductei, formându-se structuri neregulate de fază lichidă suspendate în faza gazoasă.

Tipurile de curgere bifazice sunt prezentate sub formă de hărți de curgere în care sunt indicate pe regiuni care dintre tipurile de curgere apare.

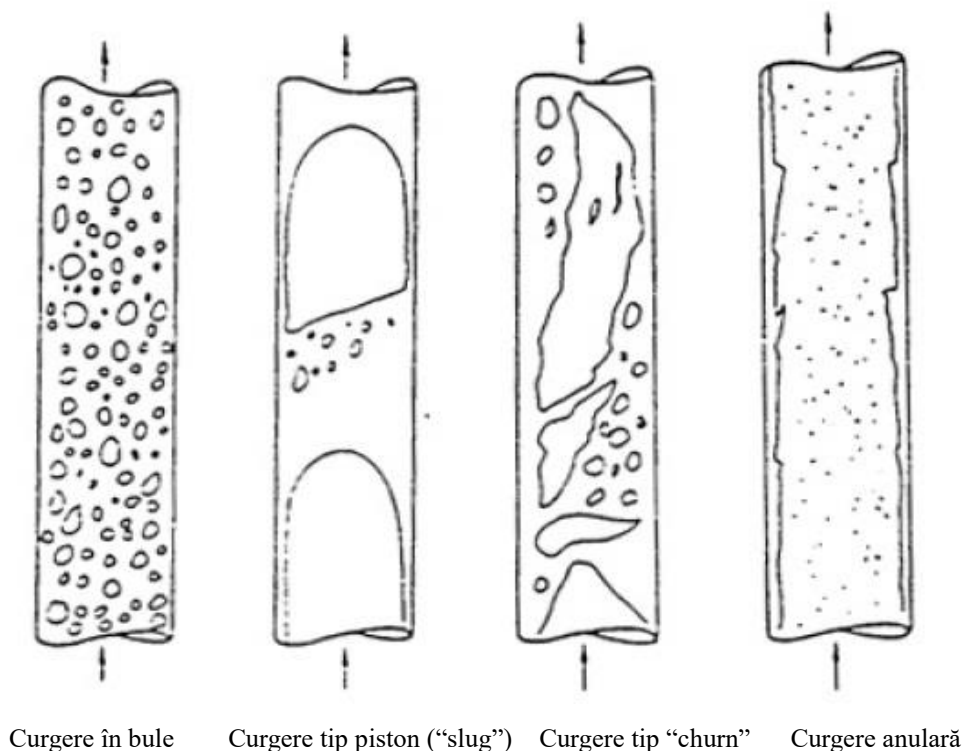


Figura 3.1. Regimuri de curgere bifazică în conducte verticale

Exemple de curgeri bifazice gas-lichid:

https://www.youtube.com/watch?v=YV_BlnpJvao

<https://www.youtube.com/watch?v=cM9V82YXT9s>

Tipuri de curgere bifazică în conducte orizontale

În conducte orizontale întâlnim următoarele tipuri de curgere, funcție de debitele pe gaz și lichid, conform Figurii 3.2:

- curgere dispersată în bule- bulele sunt dispersate în lichidul ce formează faza continuă, acestea tind să se concentreze la partea superioară a secțiunii conductei.

- curgere stratificată- faza lichida se deplasează la partea inferioară a conductei iar faza gazoasă curge deasupra fazei lichide, la partea superioară a conductei

- curgere stratificată cu valuri- Pe măsură ce viteza gazului crește în curgerea stratificată, pe suprafața lichidului, la interfața gaz lichid, se formează valuri

- curgeri puternic intermitente

- curgerea de tip plug- bulele caracteristice curgerii piston (slug) descrise anterior tind să ocupe porțiunea superioară a conductei

- curgerea de tip parțial piston - în care bulele Taylor sunt parțial formate, respectiv pe suprafața lichidului există valuri toate însă în partea superioară a conductei

- curgerea de tip piston (“slug”, cu dopuri) - se caracterizează prin prezența bulelor Taylor descrise anterior, separate de zone de lichid în care se găsesc dispersate multe bule de dimensiuni mici

- curgerea anulară cu antrenare de picături - este asemănătoare ca structură cu cea descrisă pentru conductele verticale, numai că filmul de lichid are o grosime variabilă pe secțiune, fiind de grosime mai mare spre partea inferioară a secțiunii conductei.

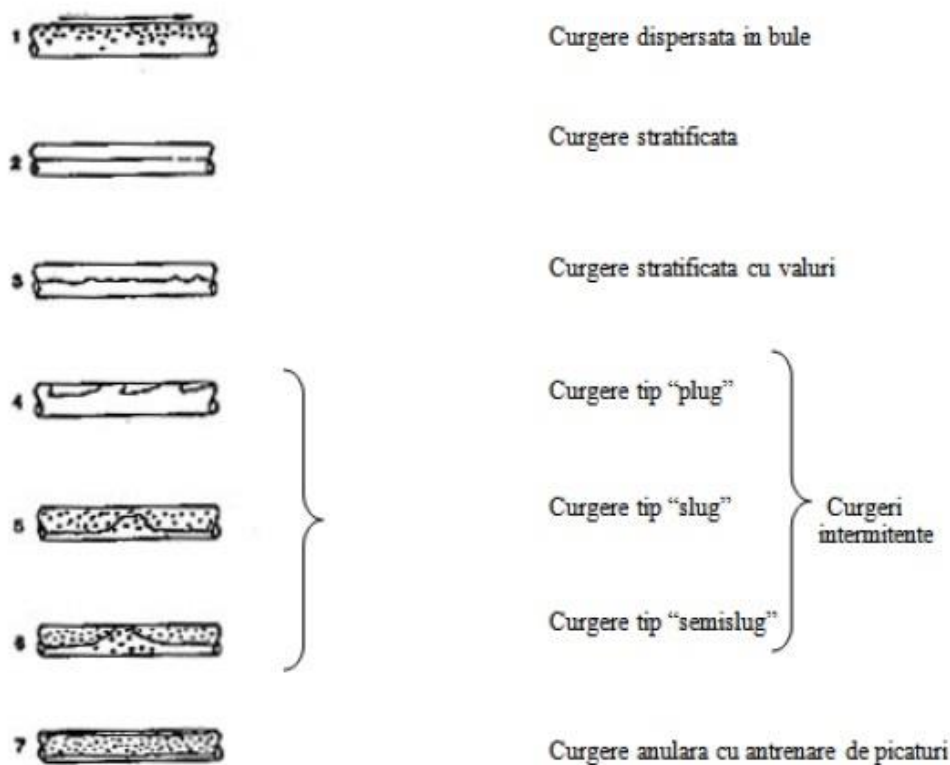


Figura 3.2. Curgeri bifazice în conducte orizontale

Structura curgerii bifazice se poate stabili dacă se cunosc mărimile caracteristice celor două faze, pe baza așa numitelor hărți de curgere. Acestea au fost trasate pe cale experimentală pentru conducte verticale, orizontale sau înclinate. De exemplu pentru conducte verticale, se poate folosi harta Hewitt și Roberts (v. Figura 3.3), în abscisa și în ordonată, fiind reprezentate respectiv mărimile $\rho_g U_g^2$ și $\rho_l U_l^2$, în care ρ_l , ρ_g sunt densitățile fazei lichide și respectiv gazoase, U_g , U_l – vitezele superficiale ale fazei gazoase și respectiv, lichide (ca și cum numai faza gazoasă sau lichidă ar ocupa întreaga secțiune a conductei).

Pentru curgerea bifazică în conducte orizontale, se folosește harta lui Taitel și Duckel (v.Figura 3.4), în care apar o serie de parametri definiți conform ecuațiilor incluse, parametrii ce constituie de fapt criterii de similitudine caracteristice curgerii bifazice.

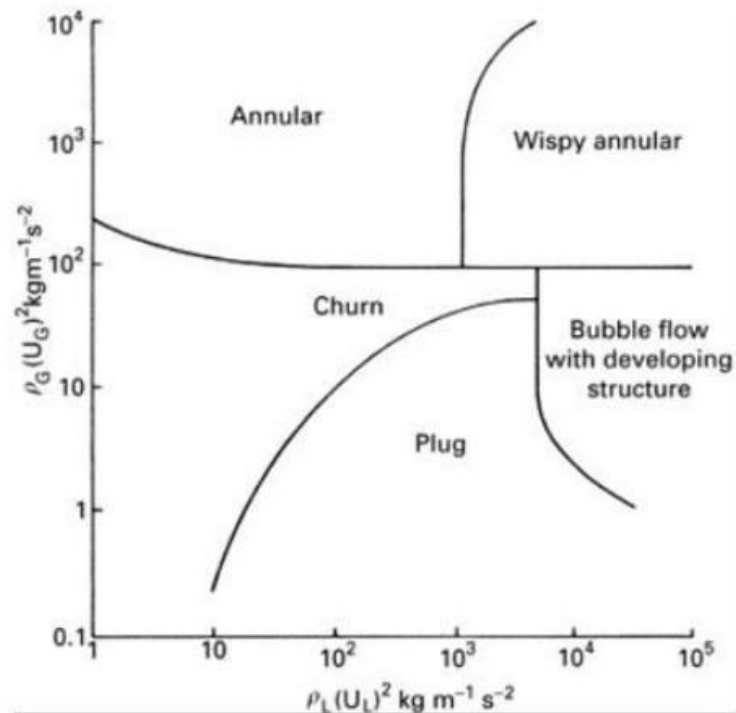


Figura 3.3 Harta regimurilor de curgere bifazica in conducte verticale (curgere ascendenta- Hewitt si Roberts)

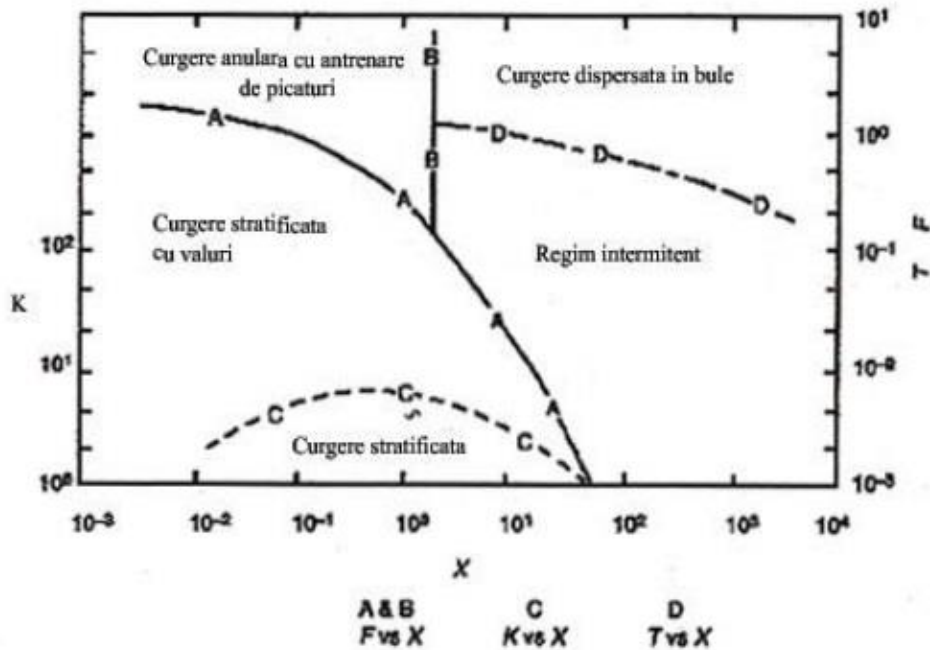


Figura 3.4 Harta regimurilor de curgere bifazica in conducte orizontale (Taitel si Duckel)

Parametrii F, K, T și X sunt definiți astfel:

$$F = \frac{U_g}{\sqrt{dg \cos \alpha}} \sqrt{\frac{\rho_g}{(\rho_l - \rho_g)}}$$

$$T = \left[\frac{(dp/dz)_l}{(\rho_l - \rho_g)g \cos \alpha} \right]^{1/2}$$

$$K = F^2 \left[\frac{dU_l}{v_l} \right]$$

$$X = \sqrt{\frac{(dp/dz)_l}{(dp/dz)_g}}$$

Pentru a stabili un anumit tip de curgere, se calculează parametrii corespunzători hărții, aceștia constituind coordonatele unui punct ce va fi situat în zona cu structura de curgere caracteristică.

Modele în curgerea bifazică

1. Modelul omogen

Se presupune că ambele faze se deplasează cu aceeași viteză. Ca urmare, se pot scrie următoarele ecuații pentru mărimile caracteristice:

$$u_g = u_l = U = \frac{M_v}{A}$$

Dem: $U = U_g + U_l = \varepsilon_g u_g + (1 - \varepsilon_g) u_l = u_l$

$$\begin{aligned} S &= 1 \\ \varepsilon_g &= \frac{x}{x + (1 - x)\rho_g/\rho_l} \\ \rho_o &= \frac{\rho_g \rho_l}{x\rho_l + (1 - x)\rho_g} \\ \dot{m} &= \rho_o U \end{aligned}$$

Ecuațiile de conservare pentru modelul omogen, de conservare a masei și respectiv a impulsului, se pot deriva pornind de la un element de conductă.

Presupunând curgerea unidimensională, ecuația continuității devine:

$$\{\text{fluxul acumulat}\} = \{\text{fluxul intrat}\} - \{\text{fluxul ieșit}\} + \{\text{fluxul generat}\}$$

$$A \frac{\partial \rho_o}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_o U / A) = 0$$

Pentru $A = \text{ct.}$, regim staționar, ecuația anterioară se simplifică la:

$$\frac{d}{dz} (\rho_o U) = \frac{dM_m}{Adz} = \frac{d\dot{m}}{dz} = 0$$

Considerând aceeași curgere unidimensională, ecuația de conservare a impulsului pentru curgerea bifazică conform modelului omogen se poate deduce pe baza conservării impulsului:

{fluxul de impuls acumulat} = {fluxul de impuls intrat} - {fluxul de impuls ieșit} + {fluxul de impuls datorat forțelor ce acționează asupra elementului de volum}

Se obține: "

$$\frac{\partial \dot{m}}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial (\dot{m}^2 A / \rho_o)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho_o g \sin \alpha - \frac{\tau_p P}{A}$$

Pentru regim staționar și ținând cont de ecuația continuității, rezultă: "

$$-\frac{dp}{dz} = \frac{\tau_p P}{A} + \dot{m}^2 \frac{d\left(\frac{1}{\rho_o}\right)}{dz} + \rho_o g \sin \alpha$$

sau :

$$-\frac{dp}{dz} = \left(-\frac{dp_f}{dz}\right) + \left(-\frac{dp_a}{dz}\right) + \left(-\frac{dp_g}{dz}\right)$$

Gradientul de presiune total este dat de suma a trei gradienti și anume gradientul corespunzător frecării, accelerației și gravitației.

2. Modelul curgerii separate a fazelor

În cadrul acestui model, cele două faze curg separat și pot interacționa una cu cealaltă. De obicei, modelul face referire la curgerea anulară a fazelor.

Ecuatiile pot fi scrise pentru fiecare fază, gazoasă sau lichidă, sau alternativ, cele două ecuații pot fi adunate pentru a da ecuația ce caracterizează proprietatea transportată de amestecul bifazic.

Ecuatia continuității are forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} A [\rho_g \varepsilon_g + \rho_l (1 - \varepsilon_g)] + \frac{\partial}{\partial z} (\dot{m} A) = 0$$

A=ct, în regim staționar primul termen se anulează, ecuația se simplifică, obținându-se: "

$$\frac{\partial \dot{m}}{\partial z} = 0$$

Ecuatia transferului de impuls, scrisă ca o sumă pentru cele două faze are forma:

$$\frac{\partial \dot{m}}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \dot{m}^2 A \left[\frac{(1-x)^2}{\rho_l (1-\varepsilon_g)} + \frac{x^2}{\rho_g \varepsilon_g} \right] \right\} = -\frac{\partial p}{\partial z} - [\rho_g \varepsilon_g + \rho_l (1 - \varepsilon_g)] g \sin \alpha - \frac{\tau_p P}{A}$$

A=ct, regim staționar $\frac{\partial \dot{m}}{\partial t} = 0$ ecuația se simplifică obținându-se:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\tau_p P}{A} + \dot{m}^2 \frac{d}{dz} \left[\frac{(1-x)^2}{\rho_l(1-\varepsilon_g)} + \frac{x^2}{\rho_g \varepsilon_g} \right] + g[\rho_g \varepsilon_g + \rho_l(1-\varepsilon_g)] \sin \alpha$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \left(-\frac{\partial p_f}{\partial z} \right) + \left(-\frac{\partial p_a}{\partial z} \right) + \left(-\frac{\partial p_g}{\partial z} \right)$$

Gradientul de presiune total este dat de suma a trei gradienti și anume gradientul corespunzător frecării, accelerației și gravitației.

Calculul căderii de presiune la curgerea bifazică prin conducte

A. Utilizând modelul omogen

Din ecuația transferului de impuls pentru modelul omogen:

$$-\frac{\partial p_f}{\partial z} = \frac{\tau_p P}{A}$$

unde: P și A sunt perimetrul udat și respectiv, aria secțiunii transversale a conductei, τ_p este efortul unitar la peretele conductei.

Pentru conducte circulare: $P/A=4/d$.

Factorul lui Fanning , f, poate fi definit ca:

$$f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2} \rho_o U^2}$$

Notă:

$$u_g = u_l = U = \frac{M_v}{A} = \frac{M_m}{\rho_o A} = \frac{\dot{m}}{\rho_o}$$

Deci, f devine:

$$f = \frac{2\rho_o \tau_p}{\dot{m}^2}$$

de unde :

$$\tau_p = f \frac{\dot{m}^2}{2\rho_o}$$

iar gradientul de presiune datorat frecării:

$$-\frac{\partial p_f}{\partial z} = 2f \frac{\dot{m}^2}{\rho_o d}$$

Trebuie stabilit factorul f pentru curgerea bifazică. Pentru aceasta, se calculează criteriul Reynolds:

$$Re = \frac{\rho_o U d}{\eta} = \frac{\dot{m} d}{\eta}$$

și se citește f din graficul stabilit pentru curgerea monofazică (amestecul este considerat omogen) sau se calculează cu ecuații semi-empirice, de exemplu ecuația Blasius:

$$f = \frac{0,079}{Re^{0,25}}$$

Se calculează vâscozitatea dinamică a amestecului folosind legea aditivității:

$$\eta = \frac{1}{\frac{x}{\eta_g} + \frac{1-x}{\eta_l}}$$

Modelul omogen utilizat pentru calculul căderii de presiune prin conducte dă rezultate mai puțin precise, excepție făcând cazul în care presiunile sunt mari. În schimb modelul omogen este utilizat cu suficientă precizie pentru calculul căderilor de presiune în cazul schimbărilor de secțiune sau de direcție, respectiv pentru coturi, valve, etc.

B. Utilizând modelul curgerii separate a fazelor

În cazul în care cele două faze sunt considerate că se deplasează separat, se pot utiliza următoarele corelații:

Corelația Lockhart-Martinelli care stabilește relații între factorii de multiplicare ϕ_l^2 și ϕ_g^2 funcție de parametrul X al corelației, definit ca:

$$X = \sqrt{\frac{(-\partial p_f / \partial z)_l}{(-\partial p_f / \partial z)_g}}$$

în care l și g se referă la curgerea numai a fazei lichide sau numai a fazei gazoase, prin conductă. Se mai definesc factorii de multiplicare:

$$\phi_l^2 = \frac{(-\partial p_f / \partial z)}{(-\partial p_f / \partial z)_l}$$

$$\phi_g^2 = \frac{(-\partial p_f / \partial z)}{(-\partial p_f / \partial z)_g}$$

unde $(-\partial p_f / \partial z)$ reprezintă gradientul de presiune corespunzător frecării pentru amestecul bifazic, iar $(-\partial p_f / \partial z)_l$ și $(-\partial p_f / \partial z)_g$ reprezintă gradientii de presiune corespunzători frecării la curgerea fazei lichide, respectiv a fazei gazoase prin conductă (curgeri monofazice).

Metoda Lockhart-Martinelli se bazează pe următoarele ipoteze:

- structura curgerii nu se modifică de-a lungul conductei;
- volumul ocupat de cele două faze trebuie să fie egal cu volumul total al conductei în orice moment și la orice locație a curgerii;
- căderea de presiune statică în faza gazoasă trebuie să fie practic egală cu cea din faza lichidă, indiferent structura curgerii.

Metoda nu se aplică curgerilor bifazice cu variații mari de presiune (de exemplu curgerii cu pistoane de gaz, "slug") și celor cu variații semnificative a presiunii radiale (de exemplu curgerea stratificată sau curgerea cu valuri).

Pentru a aplica această corelație se parcurg următorii pași:

- se determine parametrul Lockhart-Martinelli, X ;
- utilizând graficul corelației (v. Figura 3.5), se determină unul dintre coeficienții de multiplicare, $\phi_{l,ij}^2$ sau $\phi_{g,ij}^2$, unde indicii i și respectiv j , caracterizează regimul de curgere al fazei lichide și respectiv, gazoase ce poate fi "vâscos"-v sau "turbulent"-t. De exemplu, coeficientul $\phi_{l,vt}^2$ este pentru o curgere laminară a fazei lichide și respectiv, turbulentă a fazei gazoase.
- pornind de la definiția coeficientului de multiplicare calculat, se determină căderea de presiune a amestecului bifazic.

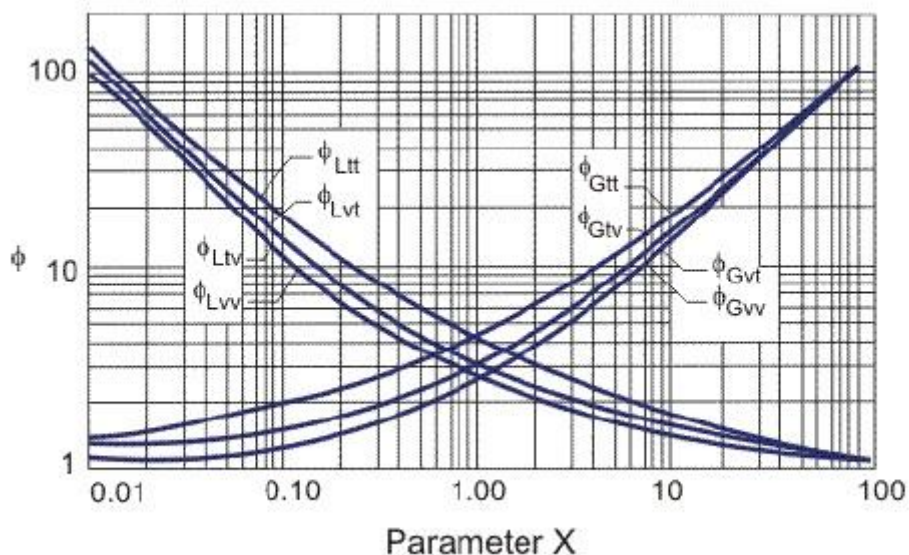


Figura 3.5 Corelația Lockhart-Martinelli

Observații:

- în metoda Lockhart-Martinelli, rugozitatea conductei este luată în considerare la calculul coeficienților de frecare pentru curgerea fazei gazoase sau a fazei lichide. Totuși studiile experimentale arată că rugozitatea și fracțiunea volumetrică de gaz au o influență majoră la curgerea bifazică cu bule dispersate .
- coeficientul despre care este mult mai mare (cu 300%) la curgerea bifazică în conducte rugoase comparativ cu cele netede
- coeficientul de frecare are valori mai mari la curgerea bifazică decât cea unifazică.
- coeficientul de frecare crește cu fracțiunea volumetrică a fazei gazoase la un criteriu Reynolds al fazei lichide constant, creșterea fiind cu atât mai mare cu cât criteriul este mai mic, în special în conducte netede.

Corelația Chisholm

Definește în mod asemănător corelației anterioare, un parametru Y:

$$Y = \sqrt{\frac{(-\partial p_f / \partial z)_{go}}{(-\partial p_f / \partial z)_{lo}}}$$

unde go și respectiv, lo se referă la gradientii de presiune de frecare pentru amestecul format din cele două faze, dar având doar proprietățile fazei gazoase și respectiv, ale fazei lichide.

După determinarea parametrului Y, se calculează un factor de multiplicare, cu ecuația:

$$\phi_{lo}^2 = 1 + (Y^2 - 1) [Bx^{(2-n)/2}(1-x)^{(2-n)/2} + x^{2-n}]$$

unde x este titlul amestecului, n este exponentul lui Reynolds din ecuația de calcul a factorului Fanning, iar B un parametru ce depinde de valoare parametrului Y:

$$B=55/\dot{m}^{1/2} \text{ pentru } 0<Y<9,5$$

$$B=520/\dot{Y}m^{1/2} \text{ pentru } 9,5<Y<28$$

$$B=15000/Y^2m^{1/2} \text{ pentru } 28<Y$$

Din definiția factorului de multiplicare ϕ_{lo}^2 :

$$\phi_{lo}^2 = \frac{(-\partial p_f / \partial z)}{(-\partial p_f / \partial z)_{lo}}$$

se determină gradientul de presiune corespunzător frecării pentru amestecul bifazic, $(-\partial p_f / \partial z)$.

Metoda Martinelli-Nelson

Se aplică pentru curgerile bifazice însoțite de transfer de masă (v. Figura 3.6).

Transferul de masă în curgerile bifazice apare atunci când există o interacțiune între fazele lichidă și gazoasă/vapori, determinând trecerea unui component dintr-o fază în alta. Acest fenomen poate fi cauzat de diferențe de concentrație, temperatură sau presiune la interfața dintre faze. Exemplele includ evaporarea, unde lichidul trece în faza gazoasă prin încălzire, și condensarea, unde vaporii se transformă în lichid prin răcire. Alte situații includ dizolvarea unui gaz în lichid sau eliberarea de gaze dizolvate. Transferul de masă influențează semnificativ structura curgerii, dinamica fazelor și pierderile de presiune, fiind esențial în proiectarea echipamentelor precum schimbătoarele de căldură, conducte de transport etc.

Metoda este exemplificată pentru curgerea bifazică a unui amestec apă-vapori de apă pentru o conductă, în care apare atât transferul de căldură cât și de masă interfazic, în condiții adiabate.

Ipoteze:

- pe parcursul curgerii, presiunea variază, are loc transferul de masă, ca modificare a procentului masic de vapori între limitele x_1 la intrarea în conductă și x_2 , la ieșirea din conductă.

- cu micșorarea presiunii de-a lungul conductei, temperatura de saturație scade, lichidul devine supraîncălzit, astfel încât noi cantități de vapori se formează.

Căderea de presiune prin frecare la o astfel de curgere bifazică se calculează cu relația:

$$\frac{(-\partial p_f / \partial z)}{(-\partial p_f / \partial z)_{x=ct}} = (1-x)^{1,75} \phi_{l,tt}^2$$

unde $(-\partial p_f / \partial z)_{x=ct}$ este gradientul de presiune prin frecare în aceeași conductă considerând că nu are loc transferul de masă ($x=ct$, de obicei $x=0$, curgere monofazică).

Factorul de multiplicare $\phi_{l,tt}^2$ se determină din graficul atașat (v. Figura 3.7) funcție de parametrul Nelson -Martinelli și presiunea amestecului bifazic, parametrul fiind definit de:

$$X_{tt} = \left(\frac{\rho_g}{\rho_l} \right)^{0,571} \left(\frac{\eta_l}{\eta_g} \right)^{0,143} \left(\frac{1-x}{x} \right)$$

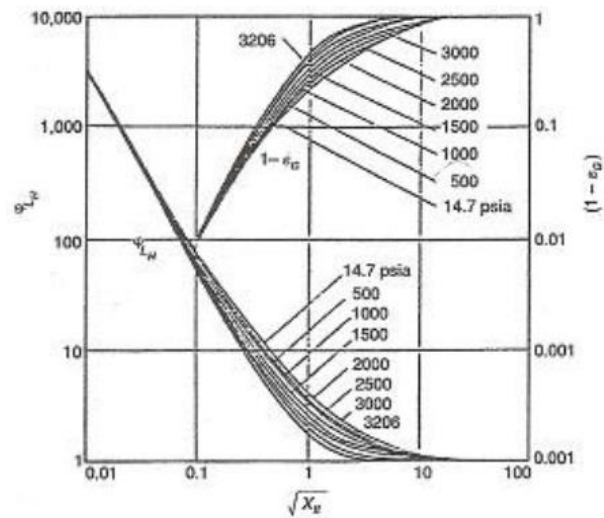
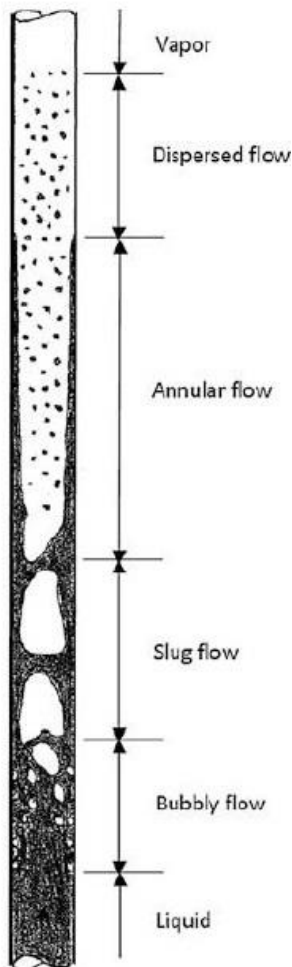


Figura 3.7 Corelația Martinelli-Nelson

Figura 3.6 Evoluția curgerii într-o conductă cu un lichid în fierbere, într-o conductă verticală

3.2. Transfer de căldură conductiv în regim nestaționar

Transferul de căldură în regim nestaționar presupune o variație a temperaturii funcție de timp ($\frac{\partial T}{\partial t} \neq 0$) dar și de coordonatele spațiale, fiind des întâlnit mai ales în procesele de încălzire și răcire.

În transferul de căldură în regim nestaționar, ecuația diferențială a conductivității termice ia forma:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

Soluțiile indicând distribuția spațio-temporală a temperaturii pot fi obținute în cazul simplificării ecuației anterioare ținând cont de geometria corpului, de o serie de condiții impuse și de condițiile de univocitate.

Încălzirea sau răcirea corpurilor în regim tranzitoriu presupune existența a două rezistențe termice și anume *rezistența termică interioară* corespunzătoare conducției prin corpul solid și *rezistența termică de suprafață* datorată convecției termice dintre corp și fluidul cu care vine în contact. Ca urmare, procesele de conducție tranzitorie se pot analiza în trei situații diferite:

- corpuri de rezistență internă neglijabilă;
- corpuri cu rezistență de suprafață neglijabilă;
- corpuri de rezistențe internă și de suprafață finite.

Conducția în regim tranzitoriu pentru corpuri cu rezistență internă neglijabilă ($Bi \ll 1$)

Rezistența internă a corpului este neglijabilă, ca urmare temperatura internă a acestuia este aproximativ constantă, iar fluxul transferat de la corp spre fluidul cu care vine în contact este egal cu fluxul acumulat în corp:

$$\alpha A (T_{\infty} - T) = \rho V c_p \frac{dT}{dt}$$

unde A și V sunt suprafața, respectiv volumul corpului, ρ și c_p sunt densitatea și respectiv, căldura specifică a corpului, T_{∞} este temperatura fluidului, T este temperatura corpului, α este coeficientul individual de transfer termic între corp și fluid.

Se separă variabilele și se integrează ecuația, rezultând:

$$\frac{\alpha A}{\rho V c_p} \int_0^t dt = \int_{T_0}^T \frac{dT}{T_\infty - T}$$

unde T_0 este temperatura inițială a corpului la momentul $t=0$. Prin integrare, se obține:

$$\frac{\alpha A t}{\rho V c_p} = \ln \frac{T_0 - T_\infty}{T - T_\infty}$$

relație ce poate fi utilizată pentru calculul timpului t necesar ca un corp să atingă o anumită temperatură T , sau:

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \exp\left(-\frac{\alpha A t}{\rho V c_p}\right)$$

ecuație ce dă temperatura T la care ajunge un corp ce a fost încălzit/răcit un timp t definit.

Se observă că raportul $\frac{\rho V c_p}{\alpha A}$ din ecuațiile (4) și (5), are unitățile de măsură pentru timp și poate fi scris ca un produs între rezistența termică convectivă, R_{conv} și capacitatea termică, C_t :

$$\tau_t = \left(\frac{1}{\alpha A}\right)(\rho V c_p) = R_{conv} C_t$$

deci este de fapt o constantă termică a sistemului. Cu cât rezistența convectivă și capacitatea termică sunt mai mari, răspunsul sistemului va fi mai lent, iar echilibrul termic va fi atins într-un interval de timp mai mare conform Figurii 3.8.

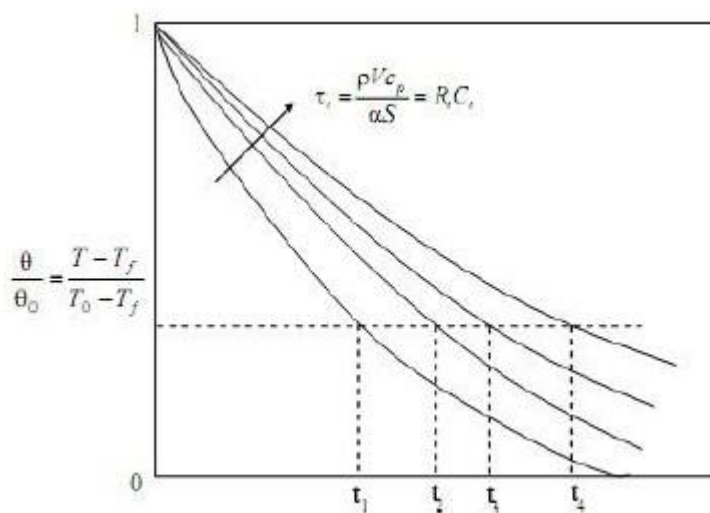


Figura 3.8 Răspuns termic în regim tranzitoriu pentru corpurile cu rezistență internă neglijabilă

Ecuția temperaturii adimensionalizate poate fi rescrisă funcție de criteriile adimensionale Biot și Fourier, definite astfel:

Criteriul Biot reprezintă raportul dintre rezistența termică de conducție și rezistența termică convectivă:

$$Bi = \frac{R_{cond}}{R_{conv}} = \frac{\frac{l}{\lambda}}{\frac{1}{\alpha}} = \frac{\alpha l}{\lambda} \quad (7)$$

unde l este o lungime caracteristică a corpului, particularizată pentru diverse geometrii. Astfel, pentru plăci, l este egal cu jumătate din grosime, iar pentru cilindri sau sfere, cu raza.

Criteriul Fourier are semnificația unui timp relativ și este dat de:

$$Fo = \frac{at}{l^2}$$

Ecuția adimensionalizată scrisă funcție de criteriile Bi și Fo devine:

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = \exp\left(-BiFo \frac{Al}{V}\right)$$

Fluxul termic transferat la un timp oarecare t este dat de relația:

$$Q_s = \alpha A(T_{\infty} - T) = \alpha A(T_{\infty} - T_0) \exp\left(\frac{\alpha At}{\rho c_p V}\right)$$

iar cantitatea de căldură transferată într-un interval de timp t_t este:

$$Q = \int_0^{t_t} Q_s dt = \alpha A \int_0^{t_t} (T_{\infty} - T) dt$$

Substituind ecuația adimensionalizată în ultima expresie, rezultă:

$$Q = (\rho V c_p)(T_{\infty} - T_0) \left[1 - \exp\left(-\frac{\alpha A t_t}{\rho c_p V}\right) \right]$$

Criteriul Biot determină căderea de temperatură prin corpul solid în raport cu diferența de temperatură dintre suprafața corpului și fluidul ce îl înconjoară. Deci, dacă rezistența internă a corpului

este neglijabilă comparativ cu cea de suprafață, ipoteza unei distribuții uniforme a temperaturii în interiorul corpului este acceptabilă. Valabilitatea acestei ipoteze se poate verifica calculând criteriul Biot. Dacă $Bi < 0,1$, ipoteza rezistenței interne neglijabile poate fi utilizată cu suficientă precizie.

Distribuția temperaturii în regim tranzitoriu, $T(x,t)$, în corpuri considerate unidimensionale, depinde semnificativ de valoarea criteriului Biot, fapt exemplificat pentru un perete plan, de temperatură T_0 la momentul $t=0$, supus răcirii prin imersarea într-un fluid în convecție, de temperatură constantă T_∞ (v.figura 2).

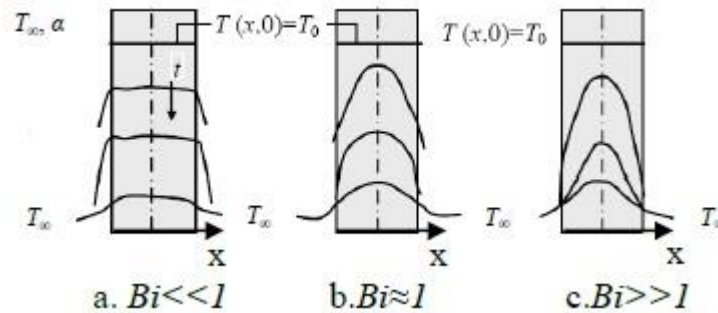


Figura 3.9 Distribuția temperaturii în regim tranzitoriu pentru diverse valori ale criteriului Biot într-un perete plan, expus convecției

Se observă că pentru $Bi \ll 1$, gradientii de temperatură din interiorul plăcii sunt neglijabili, temperatura prezentând variații doar în timp. Pe măsură ce criteriul Biot crește, deci rezistența termică a plăcii devine comparabilă ($Bi \approx 1$) și respectiv semnificativ mai mare decât rezistența la transferul dintre placă și mediu ($Bi \gg 1$), variația temperaturii de-a lungul ordonatei x se accentuează, iar dependența de timp rămâne semnificativă.

Conducția în regim tranzitoriu pentru corpuri cu rezistență de suprafață neglijabilă ($Bi \gg 1$)

Pentru o placă de dimensiune finită după direcția x (v.figura 3.9 c), ecuația diferențială a conductivității termice în regim nestacionar ia forma:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

cu condițiile inițială și la limită:

$$\text{la } t = 0 \text{ pentru } -\delta \leq x \leq \delta \quad T = T_0 = ct. ;$$

$$\text{la } t > 0 \text{ pentru } x = \pm\delta \quad T = T_\infty = T_p$$

la $t > 0$ pentru $x = 0$ $\partial T / \partial x = 0$.

Soluția pentru ecuația diferențială de mai sus se obține folosind metoda separării variabilelor:

$$\frac{T - T_p}{T_0 - T_p} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \exp \left\{ \left[-\frac{\pi(2n-1)}{2\delta} \right]^2 at \right\} \cos \left(\frac{2n-1}{\delta} \pi x \right) (-1)^n$$

unde $n=1, 3, 5, 7 \dots$

Variația temperaturii centrale la diferite corpuri de geometrii simple în condițiile unei rezistențe interne neglijabile se găsesc de obicei reprezentate grafic. [Incropera, 1996]

Conducția în regim tranzitoriu pentru corpuri cu rezistențe internă și de suprafață finite ($Bi \approx 1$)

O rezolvare analitică a ecuației diferențiale a conducției este posibilă numai pentru forme geometrice simple cum ar fi de exemplu un perete plan infinit. Pentru formele geometrice complexe, cu condiții la limită și inițiale complexe, distribuția temperaturilor se poate stabili folosind metode numerice.

Distribuția temperaturii într-o placă plană infinită, de grosime 2δ , este dată de soluția ecuației diferențiale a conductivității termice, cu condițiile inițială și la limită corespunzătoare:

$$\text{la } t = 0 \text{ pentru } -\delta \leq x \leq \delta, T = T_0;$$

$$\text{la } t > 0 \text{ pentru } x = \pm\delta, \pm\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha(T - T_\infty);$$

$$\text{la } t > 0 \text{ pentru } x = 0, \partial T / \partial x = 0.$$

Rezolvarea acestora conduce la o ecuația de forma:

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin u_n \cos(u_n x / \delta)}{u_n + \sin u_n \cos u_n} e^{-u_n^2 Fo}$$

în care Fo este criteriul Fourier iar u_n sunt rădăcinile ecuației transcendente:

$$u_n \operatorname{tg} u_n = \frac{\alpha \delta}{\lambda} = Bi$$

Șirul u_n este rapid crescător astfel încât influența termenilor superiori ai acestuia asupra temperaturii este mică. Astfel s-a stabilit că pentru procese tranzitorii ce nu decurg rapid, caracterizate

de $Fo \geq 0,3$, în ecuația temperaturii adimensionalizate de mai sus se poate considera numai primul termen al șirului.

Diagramele Heisler

Soluțiile ecuațiilor obținute anterior privind distribuția temperaturii în regim staționar pentru anumite geometrii simple, sunt reprezentate în formă grafică simplificată, în așa -numitele diagrame Heisler.

Pentru un perete plan

Figura 3.10 (a) indică temperaturi adimensionale în centrul unui perete plan x egal 0 funcție de criteriile Fo și $1/Bi$. Temperatura în corp are altă poziție x din interiorul peretelui se poate determina utilizând Figura 3.10 (b) precum și valoarea temperaturii din centrul acestuia $T_c(x=0)$ obținută din graficul anterior. De remarcat că figura doi implică că temperatura adimensională este independentă de Fo . Figura 3.10 (c) permite calculul fluxului specific de căldură transferat printr-un perete plan, funcție de criteriul Bi și fluxul specific de căldură transferat inițial (la $t=0$). Graficele se aplică de obicei pentru $Fo > 0,2$.

Pentru un cilindru sau sferă

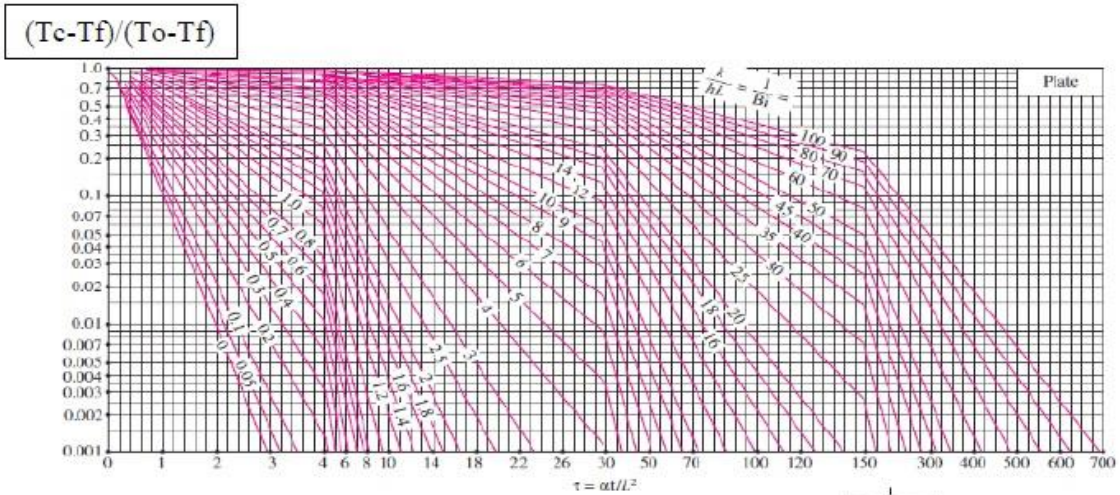
Grafice asemănătoare se regăsesc în literatură și pentru o geometrie de tip cilindru sau sfera, în Figurile 3.11 (a)-(c) și respectiv, 3.12 (a)-(c).

Lungimea caracteristică, utilizată în toate criteriile privind transferul conductiv nestaționar, pentru oricare dintre corpurile menționate se definește conform relației:

$$L_c = \frac{V}{A}$$

fiind particularizată la următoarele ecuații:

- Pentru o placă plană de grosime 2δ : $\frac{V}{A} = \frac{\delta Ll}{Ll} = \delta$
- Pentru cilindru: $\frac{V}{A} = \frac{\pi l d^2 / 4}{\pi l d} = \frac{d}{4} = \frac{r}{2}$
- Pentru o sferă: $\frac{V}{A} = \frac{\pi d^3 / 6}{\pi d^2} = \frac{d}{6} = \frac{r}{3}$



(a) Midplane temperature (from M. P. Heisler)

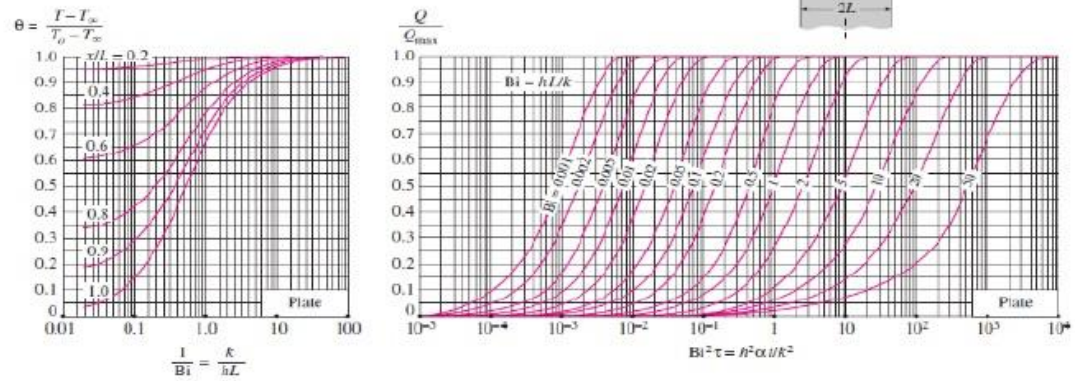
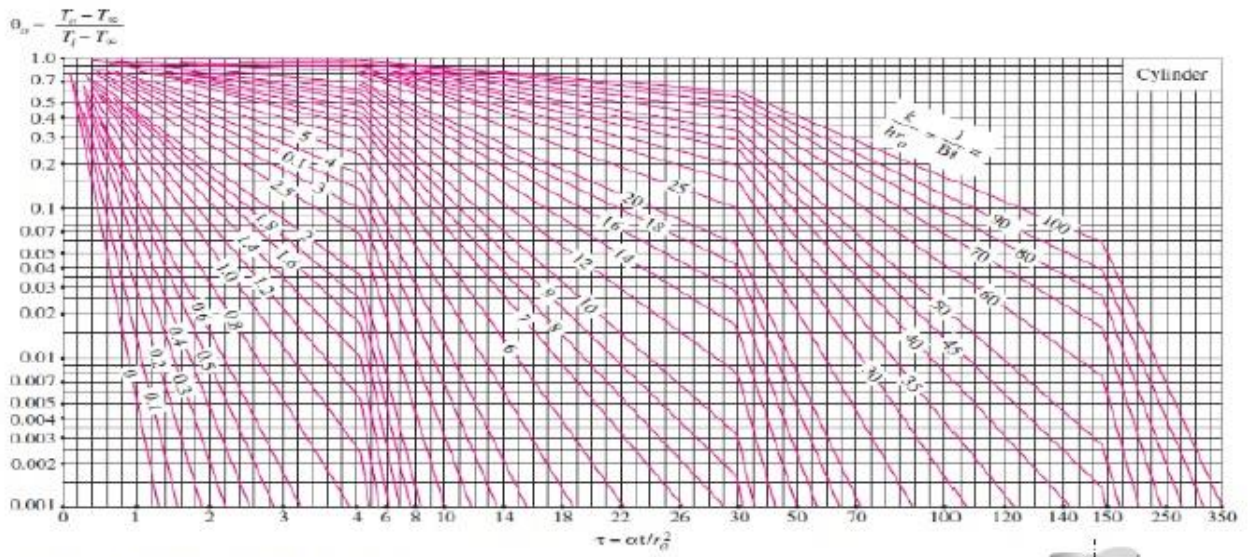
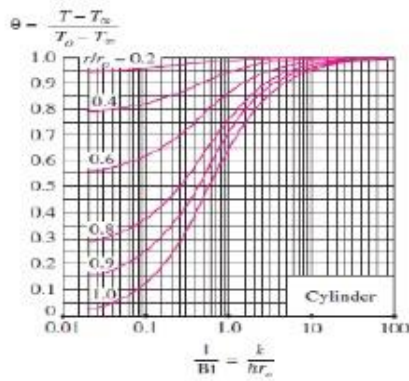


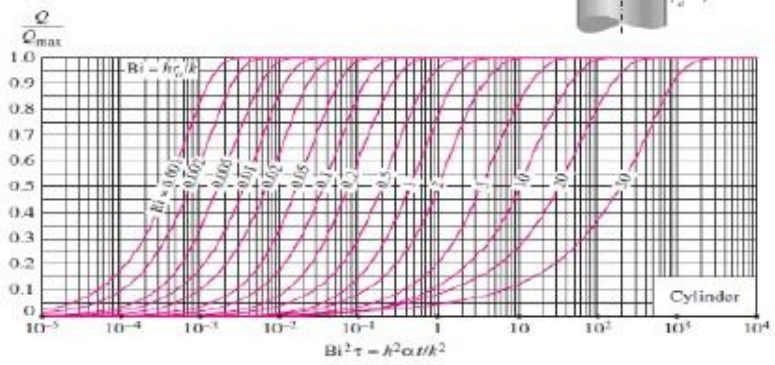
Figura 3.10 Diagrama Heisler pentru o placă plană



(a) Centerline temperature (from M. P. Heisler)

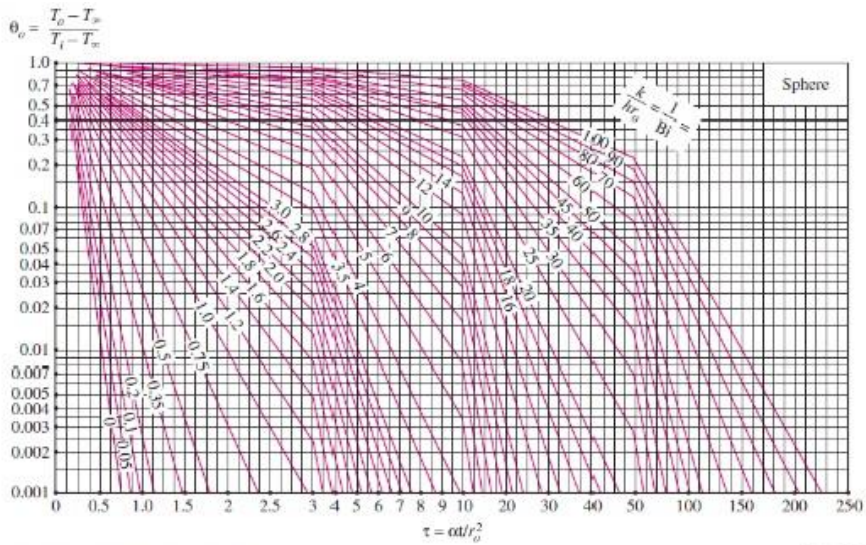


(b) Temperature distribution (from M. P. Heisler)

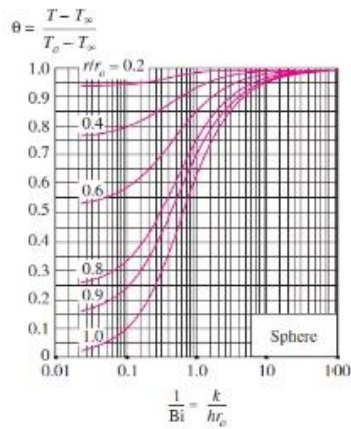


(c) Heat transfer (from H. Gröber et al.)

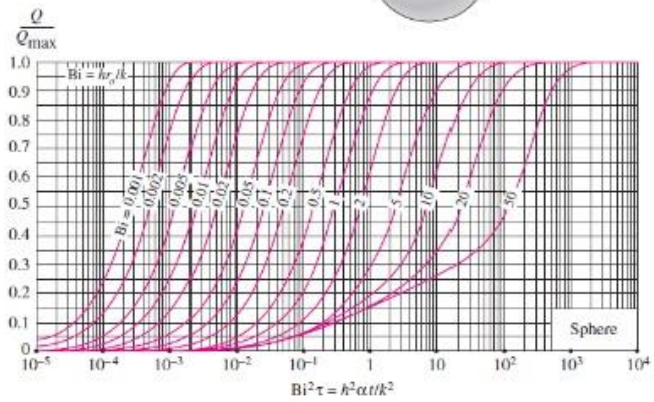
Figura 3.11 Diagrama Heisler pentru un cilindru



(a) Midpoint temperature (from M. P. Heisler)



(b) Temperature distribution (from M. P. Heisler)



(c) Heat transfer (from H. Gröber et al.)

Figura 3.12 Diagrama Heisler pentru o sferă

3.3. Transfer de căldură global în regim nestaționar

În industria chimică, procesele discontinue însoțite de transfer de căldură sunt caracterizate de un regim nestaționar. În numeroase tehnologii este necesară încălzirea sau răcirea unor mase de fluid utilizând ca agenți termici abur, apă caldă, apă rece, solă, răcirea prin pierderi de căldură în mediul înconjurător.

Câteva dintre cele mai des întâlnite cazuri în care temperatura variază în timp sunt:

1. Încălzirea sau răcirea unui lichid folosind un agent termic a cărui temperatură rămâne constantă, de exemplu: încălzirea cu abur sau răcirea prin pierdere de căldură în mediul exterior.
2. Încălzirea sau răcirea unui lichid folosind un agent termic a cărui temperatură este constantă la intrare, dar variază în timpul desfășurării operației, de exemplu încălzirea sau răcirea unui lichid dintr-un recipient utilizând apă caldă sau apă industrială.
3. Încălzirea sau răcirea unui lichid prin recircularea acestuia printr-un schimbător de căldură exterior utilizând o pompă centrifugă.

Încălzirea sau răcirea unui lichid folosind un agent termic a cărui temperatură rămâne constantă

Considerăm un recipient ce conține o masă de lichid M_2 ce urmează a fi încălzit între temperaturile T_{2i} și T_{2f} folosind ca agent de încălzire abur saturat de temperatură T_1 constantă. Cazul răcirii lichidului la o temperatură constantă a agentului corespunde pierderilor de căldură către mediul ambiant.

În figura 3.13 sunt reprezentate variațiile temperaturilor celor două fluide în timp (a) și de-a lungul ariei de transfer termic, la un moment oarecare, t , în cursul desfășurării procesului (b). După cum se observă, forța motrice globală medie dată de diferența:

$$\Delta T_{med} = T_1 - T_2 \quad (1)$$

variază în timp și este practic constantă de-a lungul ariei de transfer termic, pentru un interval de timp suficient de mic, dt .

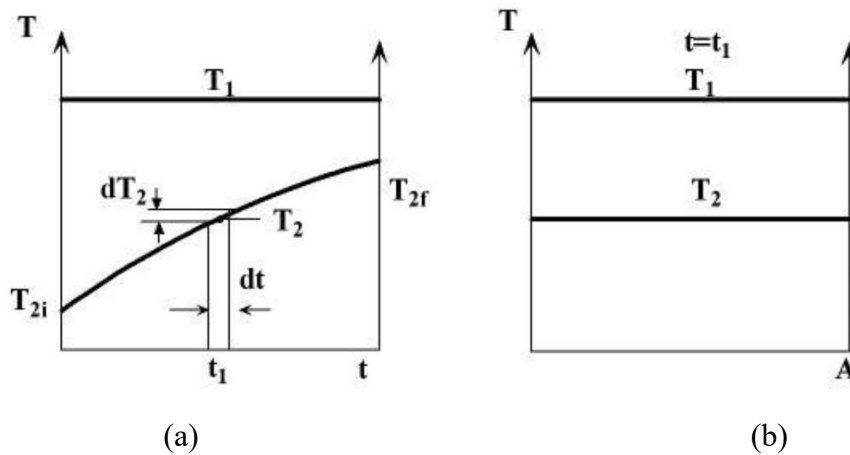


Figura 3.13 Distribuția temperaturilor celor două fluide în timp (a) și de-a lungul ariei de transfer termic (b) în transfer de căldură netaționară la o temperatură constantă a agentului termic

În ipoteza unui coeficient global de transfer de căldură, K , constant, se pot scrie următoarele ecuații:

- căldura transferată pe suprafața de transfer termic A , în intervalul de timp dt :

$$dQ = KA\Delta T_{med} dt, \text{ J} \quad (2)$$

- căldura primită de fluidul rece în intervalul de timp dt , când temperatura sa se modifică cu dT_2 :

$$dQ = M_2 c_{p2} dT_2, \text{ J} \quad (3)$$

Expresia forței motrice (1) se substituie în ecuația fluxului (2) și se egalează cu (3):

$$\int_0^t dt = \frac{M_2 c_{p2}}{A} \int_{T_{2i}}^{T_{2f}} \frac{dT_2}{K(T_1 - T_2)} \quad (4)$$

$$t = \frac{M_2 c_{p2}}{KA} \ln \frac{T_1 - T_{2i}}{T_1 - T_{2f}} \quad (5)$$

Aceeași ecuație poate fi utilizată pentru calculul suprafeței de transfer termic când timpul de încălzire t este cunoscut.

Încălzirea sau răcirea unui lichid folosind un agent termic a cărui temperatură este variabilă

Considerăm un recipient ce conține o masă de lichid M_2 ce urmează a fi încălzit între temperaturile T_{2i} și T_{2f} folosind ca agent de încălzire un alt lichid cu debitul M_{m1} , cu temperatura inițială T_{1i} ce se răcește până la temperatura T_{1f} . Ipotezele simplificatoare în vederea calcului ariei de transfer termic sau a timpului de încălzire/răcire sunt:

- proprietățile lichidelor sunt constante;
- în orice moment temperature masei de lichid supus încălzirii/răcirii este uniformă datorită agitării intense;
- coeficientul global de transfer de căldură, K , este constant;
- pierderile de căldură în mediul ambiant sunt neglijabile.

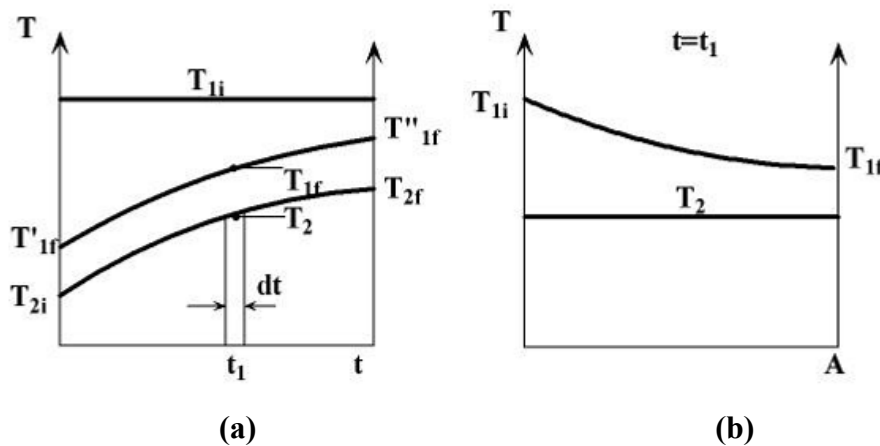


Figura 3.14 Distribuția temperaturilor celor două fluide în timp (a) și de-a lungul ariei de transfer termic (b) în transfer de căldură nestaționar la o temperatură variabilă a agentului termic

Temperatura inițială a agentului termic este constantă în timp, $T_{1i} = \text{ct.}$, spre deosebire de temperatura de ieșire a acestuia care este variabilă între limitele T'_{1f} și T''_{1f} , după cum se observă în Figura 3.14a. La un moment oarecare $t=t_1$, variația forței motrice globale medii a transferului de căldură de-a lungul ariei de transfer termic, prezentată în Figura 3.14 b este conform ecuației:

$$\Delta T_{med} = \frac{(T_{1i} - T_2) - (T_{1f} - T_2)}{\ln \frac{T_{1i} - T_2}{T_{1f} - T_2}} = \frac{T_{1i} - T_{1f}}{\ln \frac{T_{1i} - T_2}{T_{1f} - T_2}}, \text{ K} \quad (6)$$

Pentru calculul ariei sau a timpului, este necesară utilizarea a încă trei ecuații:

- căldura transferată pe suprafața de transfer termic A , în intervalul de timp dt :

$$dQ = KA\Delta T_{med} dt, \text{ J} \quad (7)$$

- căldura primită de fluidul rece în intervalul de timp dt , când temperatura sa se modifică cu dT_2 :

$$dQ = M_2 c_{p2} dT_2, \text{ J} \quad (8)$$

- căldura cedată de agentul termic în intervalul de timp dt :

$$dQ = M_{m1} c_{p1} (T_{1i} - T_{1f}) dt, \text{ J} \quad (9)$$

Expresia forței motrice se substituie în ecuația fluxului (7) și se egalează cu (9), obținându-se:

$$\frac{KA}{M_{m1} c_{p1}} = \ln \frac{T_{1i} - T_2}{T_{1f} - T_2} \quad (10)$$

Din ultima ecuație se obține expresia variației temperaturii T_{1f} de-a lungul ariei de transfer termic:

$$T_{1f} = T_2 + (T_{1i} - T_2) \exp\left(-\frac{KA}{M_{m1} c_{p1}}\right) \quad (11)$$

Prin egalarea fluxurilor transferate în intervalul de timp dt de către cele două lichide, date de ecuațiile (7) și (8), rezultă:

$$M_{m1} c_{p1} (T_{1i} - T_{1f}) dt = M_2 c_{p2} dT_2 \quad (12)$$

ecuație în care se înlocuiește expresia temperaturii T_{lf} dată de (11), ținându-se cont de ipotezele simplificatoare menționate:

$$\frac{M_{m1}c_{p1}}{M_2c_{p2}} \left[1 - \exp\left(-\frac{KA}{M_{m1}c_{p1}}\right) \right] \int_0^t dt = \int_{T_{2i}}^{T_{2f}} \frac{dT_2}{T_{1i} - T_2} \quad (13)$$

Rezolvarea integralelor conduce la:

$$\frac{M_{m1}c_{p1}t}{M_2c_{p2}} \left[1 - \exp\left(-\frac{KA}{M_{m1}c_{p1}}\right) \right] = \ln \frac{T_{1i} - T_{2i}}{T_{1i} - T_{2f}} \quad (14)$$

sau în formă echivalentă, ținând cont de relația $M_1 = M_{m1}t$:

$$-\frac{KA t}{M_1c_{p1}} = \ln \left[1 - \frac{M_2c_{p2}}{M_1c_{p1}} \ln \frac{T_{1i} - T_{2i}}{T_{1i} - T_{2f}} \right] \quad (15)$$

ecuație utilizată pentru calculul ariei de transfer termic sau a timpului necesar încălzirii/răcirii.

Încălzirea sau răcirea unui lichid prin recircularea acestuia cu o pompă centrifugă printr-un schimbător de căldură exterior

Acesta reprezintă un caz des întâlnit în practica industrială, când se lucrează cu lichide ce fac depuneri sau pur și simplu se are în vedere scurtarea duratei de realizare a operației. O masă de lichid M_2 urmează a fi încălzită între temperaturile T_{2i} și T_{2f} prin recircularea cu o pompă printr-un schimbător de căldură încălzit cu abur saturat de temperatură T_1 . Debitul de lichid transportat este M_{m2} , iar temperatura acestuia variază între limitele T_2 , la intrarea în schimbător, și T'_2 , la ieșirea din schimbător. În timp, în urma recirculărilor repetate, temperatura T'_2 va atinge valoarea finală dorită T_{2f} . Și în acest caz se consideră coeficientul global de transfer de căldură, K , constant.

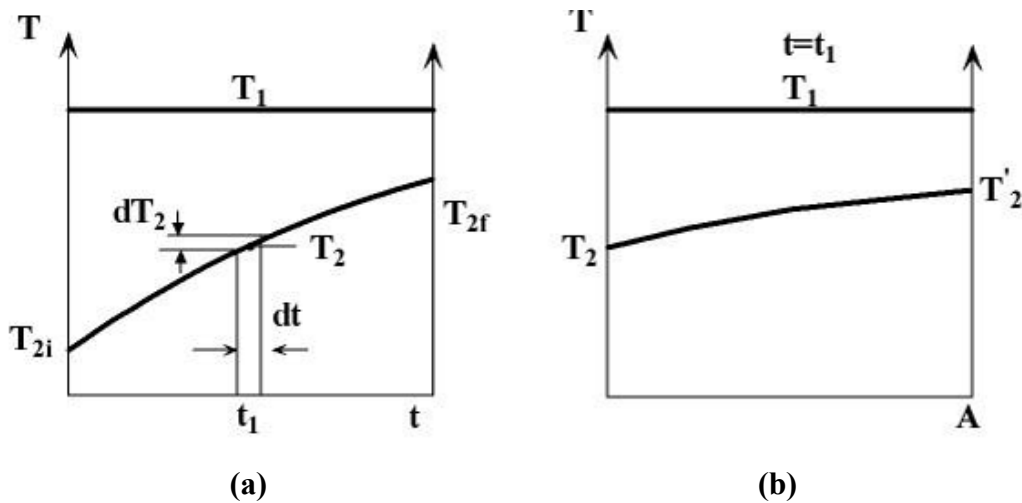


Figura 3.15 Distribuția temperaturilor celor două fluide în timp (a) și de-a lungul ariei de transfer termic (b) în transfer de căldură nestaționar prin recircularea lichidului supus încălzirii

În Figura 3.15 sunt reprezentate variațiile temperaturilor celor două fluide în timp (a) și de-a lungul ariei de transfer termic, la un moment oarecare, $t=t_1$, în cursul desfășurării procesului (b) când variația forței motrice globale medii a transferului de căldură este conform ecuației:

$$\Delta T_{med} = \frac{(T_1 - T_2) - (T_1 - T'_2)}{\ln \frac{T_1 - T_2}{T_1 - T'_2}} = \frac{T'_2 - T_2}{\ln \frac{T_1 - T_2}{T_1 - T'_2}} \quad (16)$$

Pentru calculul ariei sau a timpului, este necesară utilizarea a încă trei ecuații:

- căldura transferată pe suprafața de transfer termic A , în intervalul de timp dt :

$$dQ = KA\Delta T_{med}dt, \text{ J} \quad (17)$$

- căldura primită în schimbător de lichidul rece în intervalul de timp dt , când temperatura sa se modifică cu dT_2 :

$$dQ = M_2 c_{p2} dT_2, \text{ J} \quad (18)$$

-căldura preluată de lichid în schimbător, în intervalul de timp dt :

$$dQ = M_{m2} c_{p2} (T'_2 - T_2) dt, \text{ J} \quad (19)$$

Ca și în cazul anterior, este necesară exprimarea temperaturii variabile, T'_2 , la ieșirea din schimbător, funcție de mărimile cunoscute. Se înlocuiește forța motrice dată de (16) în (17) și se egalează cu (19):

$$M_{m2}c_{p2}(T'_2 - T_2)dt = KA \frac{T'_2 - T_2}{\ln \frac{T_1 - T_2}{T_1 - T'_2}} dt \quad (20)$$

De aici rezultă expresia variației T'_2 de-a lungul ariei de transfer termic:

$$T'_2 = T_1 - (T_1 - T_2) \exp\left(-\frac{KA}{M_{m2}c_{p2}}\right) \quad (21)$$

Expresia (21) se înlocuiește în expresia (19), rezultând:

$$dQ = M_{m2}c_{p2} \left[1 - \exp\left(-\frac{KA}{M_{m2}c_{p2}}\right) \right] (T_1 - T_2) dt \quad (22)$$

expresie ce se egalează cu ecuația (18). Se obține o ecuație ce urmează a fi integrată între limitele corespunzătoare:

$$M_2 \int_{T_{2i}}^{T_{2f}} \frac{dT_2}{T_1 - T_2} = M_{m2} \left[1 - \exp\left(-\frac{KA}{M_{m2}c_{p2}}\right) \right] \int_0^t dt \quad (23)$$

Rezultă o ecuație de forma:

$$\frac{M_2}{M_{m2}} \ln \frac{T_1 - T_{2i}}{T_1 - T_{2f}} = \left[1 - \exp\left(-\frac{KA}{M_{m2}c_{p2}}\right) \right] \cdot t \quad (24)$$

ce permite calculul timpului de încălzire, a ariei de transfer termic sau a debitului masic de fluid recirculat după cum două dintre cele trei mărimi sunt cunoscute, iar a treia trebuie determinată.

4. TRANSFER DE PROPRIETATE ÎN SISTEME BIDIMENSIONALE

Transferul de căldură în sisteme bidimensionale joacă un rol esențial în ingineria proceselor fizice, deoarece multe aplicații industriale implică fluxuri termice ce pot fi reduse la două dimensiuni. Această situație apare frecvent în răcirea/încălzirea unor plăci plane, schimbătoare de căldură, conducte sau straturi subțiri, în diferite condiții de temperatură și flux termic.

Transfer de căldură conductiv bidimensional în regim staționar

În cazul unui corp bidimensional după direcțiile x și y , de conductivitate termică constantă, fără sursă de energie internă, ecuația diferențială a conductivității termice ia forma:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

Soluția analitică a acestei ecuații poate fi obținută numai pentru geometrii simple de tip placă rectangulară, cilindru și sferă, în condiții la limită bine definite. Una dintre metodele analitice utilizate pentru soluționarea ecuației în cazul în care doar una dintre condițiile la limită este neomogenă (v. prima ecuație din (1)) este *metoda separării variabilelor* conform căreia soluția este căutată în forma:

$$\theta(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \quad (2)$$

în care s-a folosit transformarea:

$$\theta = \frac{T - T_{p1}}{T_{p2} - T_{p1}} \quad (3)$$

și ecuația (1) devine:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 \quad (4)$$

Condițiile la limită sunt:

$$\begin{aligned} \theta(0, y) = 1 \quad \theta(\delta, y) = 0 \\ \theta(x, 0) = 0 \quad \theta(x, H) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

După substituția relației (2) în ecuația (4), se obține:

$$-\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} \quad (6)$$

Fiecare membru al ecuației depinde de o singură variabilă, astfel încât fiecare se poate egala cu o constantă pozitivă, notată cu ω^2 . Se obțin două ecuații diferențiale de forma:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \omega^2 X = 0 \quad (7)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} - \omega^2 Y = 0 \quad (8)$$

Soluțiile acestor ecuații sunt:

$$X = k_1 \cos \omega x + k_2 \sin \omega x \quad (9)$$

$$Y = k_3 e^{-\omega y} + k_4 e^{\omega y} \quad (10)$$

iar soluția generală este:

$$\theta(x, y) = (k_1 \cos \omega x + k_2 \sin \omega x)(k_3 e^{-\omega y} + k_4 e^{\omega y}) \quad (11)$$

constantele de integrare k_1 , k_2 , k_3 și k_4 determinându-se prin utilizarea condițiilor la limită și prin dezvoltarea în serie a unor funcții ortogonale. Soluția finală permite calculul temperaturii adimensionale funcție de coordonatele x și z , în placa de lățime B , în forma:

$$\theta(x, y) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh \left[(2n+1) \pi (\delta - x) / H \right] \sinh \left[(2n+1) \pi y / H \right]}{\sinh \left[(2n+1) \pi \delta / H \right] (2n+1)}$$

$$\theta(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \sin \frac{n \pi x}{\delta} \frac{\sinh(n \pi y / L)}{\sinh(n \pi B / L)} \quad (12)$$

și respectiv a fluxului termic transmis prin partea laterală a plăcii:

$$q = \frac{8}{\pi} B \lambda (T_{p2} - T_{p1}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \tanh \left[(2n+1) \pi \delta / H \right]} \quad (13)$$

Izotermele și liniile de flux obținute sunt reprezentate în Figura 4.1.

Dacă două sau mai multe dintre condițiile la limită sunt neomogene, cazul poate fi soluționat prin împărțirea în două sau mai multe subsisteme ce conțin, fiecare, o singură condiție la limită neomogenă.

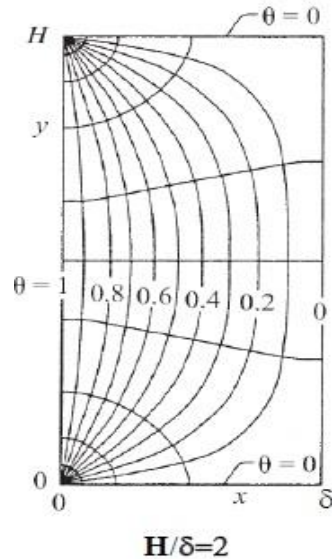


Figura 4.1 Distribuția temperaturii și a liniilor de flux termic într-o placă rectangulară

Pentru fiecare dintre acestea se obține o soluție prin metoda separării variabilelor, iar soluția generală rezultă prin însumarea soluțiilor corespunzătoare subsistemelor componente.

Dacă două sau mai multe dintre condițiile la limită sunt neomogene, cazul poate fi soluționat prin împărțirea în două sau mai multe subsisteme ce conțin, fiecare, o singură condiție la limită neomogenă. Pentru fiecare dintre acestea se obține o soluție prin metoda separării variabilelor, iar soluția generală rezultă prin însumarea soluțiilor corespunzătoare subsistemelor componente.

Metoda factorilor conductivi de formă (configurație) nu oferă o distribuție a temperaturii, dar permite determinarea fluxului specific termic transferat prin utilizarea relației:

$$q = \lambda S(T_1 - T_2) \quad (14)$$

cu S s-a notat factorul de formă corespunzător sistemului studiat, λ - coeficientul de conductivitate termică și $(T_1 - T_2)$ - potențialul termic al transferului. Factorul de formă poate fi determinat funcție de geometria și caracteristicile geometrice ale sistemului în care are loc schimbul termic, câteva dintre ecuațiile de calcul fiind prezentate în tabelul 4.1:

Tabelul 4.1 Factori de formă pentru sisteme bidimensionale, q calculat cu ecuația (14):

Tipul de sistem		Caracteristici geometrice	Factor de formă
Descriere	Schiță		
1	2	3	4
Sferă izotermă în mediu semi-infinit		$z > D/2$	$\frac{2\pi D}{1 - D/4z}$
Cilindru orizontal, izoterm, de lungime L în mediu semi-infinit		$L \gg D$	$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}(2z/D)}$
		$L \gg D, z > 3D/2$	$\frac{2\pi L}{\ln(4z/D)}$
Cilindri de aceeași lungime L , în mediu semi-infinit		$L \gg D_1, D_2$ $L \gg w$	$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{4w^2 - D_1^2 - D_2^2}{2D_1D_2}\right)}$
Cilindri excentrici de aceeași lungime L		$D > d$ $L \gg D$	$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{D^2 + d^2 - 4z^2}{2Dd}\right)}$
Conducție la îmbinarea a două plăci		$D > L/5$	0,54D
Conducție la îmbinarea a trei plăci (potențialul termic aplicat pe grosimea peretelui)		$L >$ lungimea și lățimea peretelui	0,15 L

Metoda rețelei bazată pe diferențe finite în coordonate carteziene presupune aplicarea unei rețele zonei de interes, formate din linii ce se intersectează, urmată de calculul temperaturilor în punctele de intersecție, numite nodurile rețelei. De exemplu, pentru o suprafață rectangulară, nodurile sunt desemnate cu notația ij , unde i , respectiv j indică liniile de rețea după direcțiile x și respectiv y , iar dimensiunile celulelor formate sunt Δx și respectiv Δy . Temperatura în nodul ij , T_{ij} este considerată valoarea medie a zonei hașurate (v. Figura 4.2 a). Selectarea nodurilor și numărul acestora se face funcție de geometria sistemului și de precizia necesară în calcule. Astfel, cu cât numărul de noduri este mai mare, adică rețeaua este mai fină, cu atât și precizia va fi mai mare, iar calculele mai laborioase.

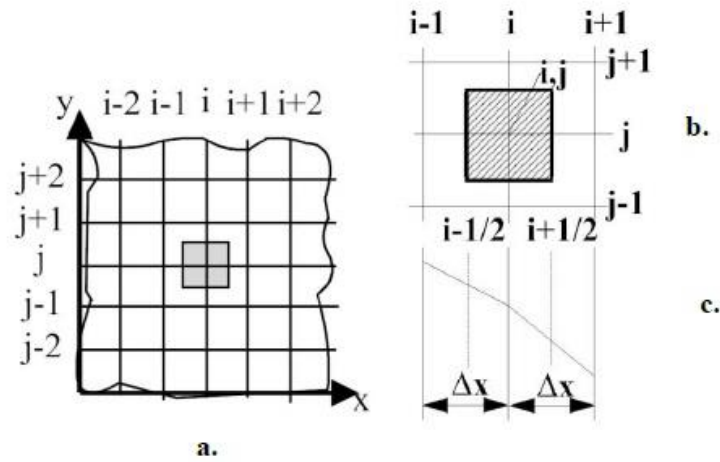


Figura 4.2 Transfer conductiv bidimensional:

a. rețea de divizare a corpului; b. element al rețelei; c. distribuția temperaturii $T(x)$.

Pentru un punct din interiorul corpului, fără sursă de energie internă, (v. Figura 4.2 b), transferul conductiv este descris de ecuația (1), în care derivatele de ordinul doi sunt înlocuite cu diferențe finite după cum urmează:

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{i,j} \approx \frac{\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i+1/2,j} - \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i-1/2,j}}{\Delta x} \quad (15)$$

Gradienții de temperatură pot fi exprimați funcție de temperaturile din noduri conform figurii 5.

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i+1/2,j} \approx \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x} \quad (16)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i-1/2,j} \approx \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x} \quad (17)$$

Substituția ecuațiilor (16) și (17) în expresia (15) conduce la ecuația:

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{i,j} \approx \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 2T_{i,j}}{(\Delta x)^2} \quad (18)$$

În mod analog, se poate deduce:

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_{i,j} \approx \frac{\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{i,j+1/2} - \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{i,j-1/2}}{\Delta y} \approx \frac{T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 2T_{i,j}}{(\Delta y)^2} \quad (19)$$

Pentru simplificare, de obicei se admite $\Delta x = \Delta y$ și substituția celor două derivate (18) și (19) în ecuația (1) generează o ecuație algebrică, aplicabilă oricărui nod interior, înconjurat echidistant de alte patru noduri:

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0 \quad (20)$$

Ecuația indică temperatura nodului ij ca fiind egală cu media aritmetică a temperaturilor nodurilor ce îl înconjoară.

Aceeași ecuație poate fi obținută prin aplicarea conservării energiei pentru un volum elementar ce conține nodul ij .

5. TRANSFERURI GLOBALE DE PROPRIETATE

5.1. TRANSFER GLOBAL DE CĂLDURĂ

Caracterizarea intensității transferului de căldură global sau interfazic ce apare în schimbătoarele de căldură se realizează prin intermediul coeficienților de transfer de căldură, care includ atât rezistențele termice ale fluidelor implicate, cât și cele ale pereților despărțitori, fiind esențială pentru evaluarea performanței și optimizarea funcționării acestor echipamente.

Într-un schimbător de căldură în care se contactează un fluid cald și unul rece prin intermediul unui perete format din trei straturi diferite, fluxul termic trebuie să străbată cinci rezistențe, așa cum sunt prezentate și în Figura 5.1 și anume:

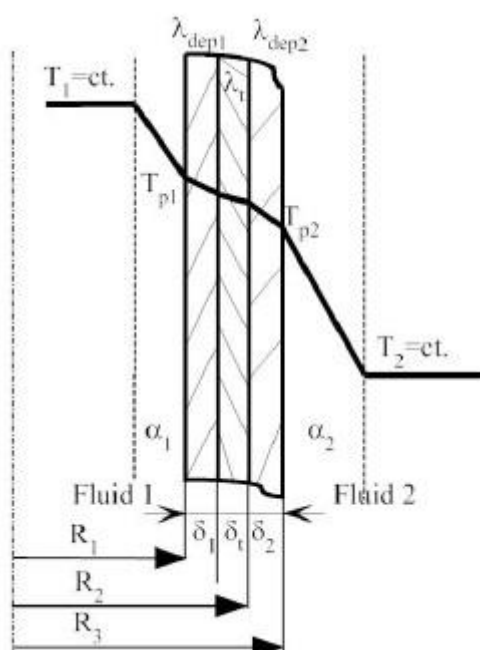


Figura 5.1 Rezistențe termice de tip convectiv și conductiv la contactarea indirectă a două fluide

Rezistențele de tip convectiv (dedusă pe baza analogiei dintre legea de “răcire” a lui Newton și legea lui Ohm) și de tip conductiv (dedusă pe baza analogiei dintre legea lui Fourier și legea lui Ohm), pentru contactarea printr-un perete plan sau cilindric sunt prezentate mai jos:

1. Rezistența stratului limită de partea fluidului cald aflat în convecție de-a lungul unui perete, intensitatea transferului fiind caracterizată de coeficientul α_1 :

-plan	-cilindric
$R_{cl} = \frac{1}{\alpha_1}, m^2K/W$	$R_{cl} = \frac{1}{\alpha_1 A_1}, K/W$

(1)

2. Rezistența la transferul conductiv prin peretele de depuneri, de conductivitate termică λ_{dep1} , grosime δ_1 și lungime L , de partea fluidului cald:

-perete plan	-perete cilindric
$R_{cond1} = \frac{\delta_1}{\lambda_{dep1}}, m^2K/W$	$R_{cond1} = \frac{\delta_1}{2\pi L \lambda_{dep1} R_{m1}}, K/W$
cu $R_{m1} = \frac{R_2 - R_1}{\ln(R_2 / R_1)}$	

(2)

3. Rezistența de tip conductiv a peretelui schimbătorului, de conductivitate termică λ_p și grosime δ_p :

-perete plan	-perete cilindric
$R_p = \frac{\delta_p}{\lambda_p}, m^2K/W$	$R_p = \frac{\delta_p}{2\pi L \lambda_p R_{m2}}, K/W$
cu $R_{m2} = \frac{R_3 - R_2}{\ln(R_3 / R_2)}$	

(3)

4. Rezistența la transferul conductiv prin peretele de depuneri de conductivitate termică λ_{dep2} și grosime δ_2 , de partea fluidului rece:

-perete plan	-perete cilindric
$R_{cond2} = \frac{\delta_2}{\lambda_{dep2}}, m^2K/W$	$R_{cond2} = \frac{\delta_2}{2\pi L \lambda_{dep2} R_{m3}}, K/W$
cu $R_{m3} = \frac{R_4 - R_3}{\ln(R_4 / R_3)}$	

(4)

5. Rezistența stratului limită de partea fluidului cald, intensitatea transferului fiind caracterizată de coeficientul α_2 :

-plan	-cilindric
$R_{c2} = \frac{1}{\alpha_2}, m^2K/W$	$R_{c2} = \frac{1}{\alpha_2 A_2}, K/W$

(5)

Toate aceste rezistențe sunt înseriate, rezistența totală fiind dată de suma rezistențelor corespunzătoare proceselor elementare:

-plan	-cilindric
$R_t = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_{depl}}{\lambda_{depl}} + \frac{\delta_p}{\lambda_p} + \frac{\delta_{dep2}}{\lambda_{dep2}} + \frac{1}{\alpha_2}, \text{ m}^2\text{K/W}$	$R_t = \frac{1}{\alpha_1 A_1} + \frac{\delta_{depl}}{2\pi L \lambda_{depl} R_{m1}} + \frac{\delta_p}{2\pi L \lambda_p R_{m2}} + \frac{\delta_{dep2}}{2\pi L \lambda_{dep2} R_{m3}} + \frac{1}{\alpha_2 A_2}, \text{ K/W}$

(6)

Rezistența totală scrisă funcție de coeficientul global de transfer de căldură K și aria de transfer termic A în forma cea mai generală este:

$$R_t = \frac{1}{KA}, \text{ K/W} \quad (7)$$

În cazul validității ipotezei unui coeficient global de transfer de căldură constant, fluxul de căldură schimbat este calculat cu ecuația:

$$Q = K A \Delta T_{med} \quad (8)$$

în care expresia forței motrice globale medii ΔT_{med} este dată de ecuația:

$$\Delta T_{med} = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}} \quad (9)$$

Media logaritmică se poate înlocui cu media aritmetică dacă raportul $\Delta T_2/\Delta T_1 < 2$:

$$\Delta T_{med} = \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{2} \quad (10)$$

5.2. TRANSFER GLOBAL DE MASĂ

Caracterizarea intensității transferului de masă global sau interfazic ce apare în procesele de separare, precum absorbția, distilarea sau extracția, se realizează prin intermediul coeficienților globali de transfer de masă. Aceștia integrează rezistențele la transfer din ambele faze implicate și eventualele rezistențe la interfață, fiind esențiali pentru evaluarea eficienței procesului și pentru dimensionarea optimă a echipamentelor utilizate.

Expresiile coeficienților globali de transfer de masă, unul raportat la faza gazoasă, K_g , celălalt la faza lichidă, K_l , sunt date de ecuațiile:

$$K_g = \frac{1}{\frac{1}{k_g} + \frac{k_H}{k_l}}$$

$$K_l = \frac{1}{\frac{1}{k_g k_H} + \frac{1}{k_l}}$$

unde k_g , k_l sunt coeficienții individuali de transfer de masă din faza gazoasă și respectiv, lichidă, k_H – coeficientul lui Henry.

Fluxul total de masă transferat este limitat de rezistențele la transfer din ambele filme. Aceste rezistențe se pot aduna deoarece procesele decurg în serie, iar fluxul total este determinat de faza cu rezistența mai mare (faza limitatoare). Deci, transferul masic poate fi limitat de rezistența mare din interiorul unei faze.

Dacă $k_g \ll k_l$, rezistența la transfer este dominată de faza gazoasă, iar transferul este limitat de aceasta. În acest caz, se spune că faza gazoasă este faza limitatoare. Dacă $k_l \ll k_g$, faza lichidă este faza limitatoare.

Ecuțiile indicând fluxul de component, N_A , transferat când raportarea se face la faza gazoasă, respectiv la cea lichidă, devin:

$$N_A = K_g A \Delta Y_{Amed}$$

$$N_A = K_l A \Delta X_{Amed}$$

unde A este aria de transfer de masă, iar ΔY_{med} și respectiv, ΔX_{med} sunt forțele motrice globale ale transferului de masa când raportarea se face la faza gazoasă, respectiv la cea lichidă.

Bilanțul de materiale și distribuția concentrațiilor unui proces de absorbție ce se desfășoară într-o coloană precum cea din Figura 5.2, spre exemplu, sunt caracterizate de ecuațiile bilanțului de masă și ecuația liniei de operare a procesului, dedusă din bilanț. Astfel, debitul de component A transferat se poate raporta o dată la faza gazoasă și respectiv la faza lichidă:

$$N_A = G(Y_{in} - Y_f) = L(X_f - X_{in})$$

în care G este debitul molar sau masic de gaz inert, L este debitul molar sau masic de absorbant. Y_{in} și Y_f sunt concentrațiile componentului absorbit în faza gazoasă, la intrarea și respectiv, ieșirea din coloană, exprimate sub formă de rapoarte molare sau rapoarte masice, iar X_{in} și X_f sunt concentrațiile componentului absorbit în faza lichidă, la intrarea și respectiv, ieșirea din coloană

Din aceste ecuații, se deduce panta dreptei de operare MN:

$$\frac{L}{G} = \frac{X_f - X_{in}}{Y_{in} - Y_f}$$

Orice punct de pe linia de operare indică concentrațiile solutului din faza gazoasă și, respectiv, faza lichidă, la o anumită secțiune a coloanei.

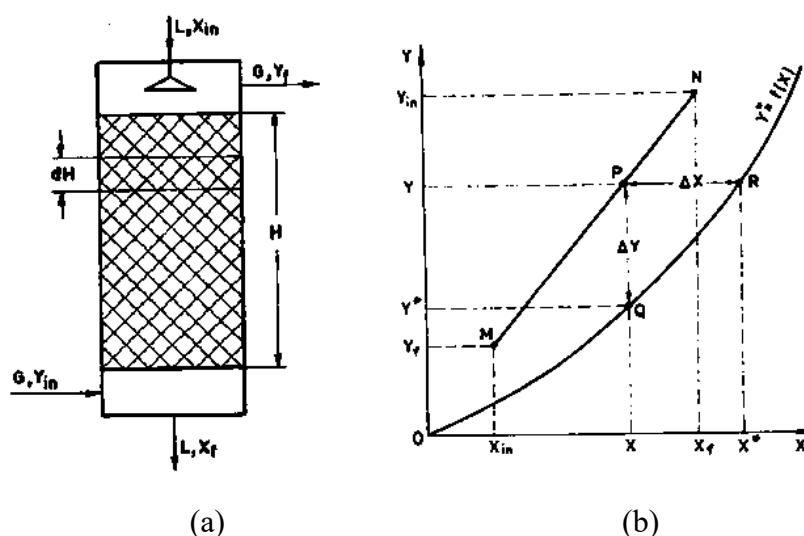


Figura 5.2 Coloană de absorbție (a); Linie de operare MN și curbă de echilibru (b)

Forțele motrice globale medii raportate la faza gazoasă și respectiv la faza lichidă, pot fi calculate cu ecuațiile:

$$\Delta Y_{Amed} = \frac{Y_{Ain} - Y_{Af}}{\int_{Y_{Af}}^{Y_{Ain}} \frac{dY_A}{Y_A - Y_A^*}}$$

$$\Delta X_{Amed} = \frac{X_{Af} - X_{Ain}}{\int_{X_{Ain}}^{X_{Af}} \frac{dX_A}{X_A^* - X_A}}$$

în care Y_A^* și X_A^* sunt concentrații de echilibru, marcate în Figura 5.2.

Dacă se cunoaște linia de echilibru pentru sistemul investigat - de obicei aceasta se obține experimental- integrala de la numitor se poate rezolva grafic sau prin metode numerice. Dacă linia de echilibru este o dreaptă, ecuațiile de mai sus pentru calculul forțelor motrice devin medii logaritmice ale forțelor motrice globale de la extremitățile coloanei:

- pentru faza lichidă:

$$\Delta Y_{Amed} = \frac{\Delta Y_{Ain} - \Delta Y_{Af}}{\ln \frac{\Delta Y_{Ain}}{\Delta Y_{Af}}}$$

cu: $\Delta Y_{Ain} = Y_{Ain} - Y_{Ain}^*$

$\Delta Y_{Af} = Y_{Af} - Y_{Af}^*$

- pentru faza gazoasă:

$$\Delta X_{Amed} = \frac{\Delta X_{Af} - \Delta X_{Ain}}{\ln \frac{\Delta X_{Af}}{\Delta X_{Ain}}}$$

cu: $\Delta X_{Ain} = X_{Ain}^* - X_{Ain}$

$$\Delta X_{Af} = X_{Af}^* - X_{Af}$$

Concentrațiile la echilibru, X_{Ai}^* , X_{Af}^* , Y_{Ai}^* , Y_{Af}^* se pot calcula folosind o lege de echilibru.

6. TRANSFERURI DE PROPRIETATE SIMULTANE

În majoritatea operațiilor industriale, transferul de masă este însoțit de transfer de căldură, ceea ce determină creșterea complexității studierii procesului care joacă un rol esențial în optimizarea funcționării sistemelor. Când cele două procese au loc simultan, există o interdependență între ele, iar fenomenul devine guvernat de ecuații complexe care implică gradientii de temperatură și concentrație, acesta fiind influențat de parametri fizico-chimici caracteristici.

Transferurile simultane de proprietate sunt întâlnite în diverse aplicații, cum ar fi evaporarea, condensarea, uscarea, distilarea, absorbția etc.

Transferul combinat de masă și căldură este caracterizat de convecție, implicând mișcarea fluidelor, ceea ce accelerează transportul atât al masei, cât și al căldurii, de difuzie moleculară dar și de schimb latent de căldură dacă procesul implică schimbări de fază.

Transferul de masă și căldură combinat poate fi descris prin ecuații diferențiale parțiale care reflectă conservarea masei, energiei și impulsului. Aceste ecuații sunt adesea cuplate pentru a ține cont de interacțiunea dintre transferul de căldură și de masă, mai ales în prezența schimbului latent de energie sau a gradientilor termici care influențează difuzia moleculară. Factorii care influențează aceste procese, cum sunt gradientii de temperatură și concentrație, proprietățile materialelor, geometria sistemului influențează semnificativ eficiența procesului.

Înțelegerea transferurilor simultane de proprietate permite dezvoltarea unor soluții avansate și eficiente pentru procesele de separare, schimb de căldură, producție de energie etc.

6.1. Transfer de căldură cu schimbarea stării de agregare

CONDENSAREA

Condensarea reprezintă procesul prin care vaporii unei substanțe trec în stare lichidă atunci când sunt răciți sau vin în contact cu o suprafață de temperatură egală sau mai mică decât temperatura lor de saturație. Procesul are loc cu eliberarea unei cantități semnificative de căldură datorită diferențelor mari între energiile interne corespunzătoare celor două stări. Condensarea pe o suprafață poate avea loc în film subțire (condensare peliculară) sau în picături (condensare nucleică). Condensarea în film subțire apare când condensatul udă complet suprafața cu care vin în contact vaporii, în timp ce condensarea în picături intervine când condensatul udă parțial sau nu udă suprafața. Coeficienții de transfer de căldură pentru condensarea în picături pot fi de până la zece ori mai mari decât cei corespunzători condensării în film. De exemplu pentru apă la 1 atm, coeficientul de transfer de căldură la condensarea în picături este de $200000 \text{ W/m}^2\text{K}$. Cu toate

acestea, condensarea în picături este greu de menținut în practică, deoarece majoritatea suprafețelor se impurifică în timp, devenind umectabile, iar condensarea devine peliculară.

La condensarea în film de-a lungul unui perete vertical, regimul de curgere din filmul de condens caracterizat de criteriul lui Reynolds calculat cu relația:

$$Re_x = 4 M_x / \eta \quad (1)$$

poate fi: laminar cu suprafață plană sau cu valuri, caracterizat de $Re_x \approx 30$, și respectiv, turbulent, cu $Re_x \approx 1600 \div 1800 x$, unde M_x este debitul specific de condens, în kg/(ms) și η este vâscozitatea dinamică a acestuia.

Nusselt (1916) a propus o soluție analitică pentru condensarea în film a vaporilor în curgere, în regim staționar, laminar, de-a lungul unei plăci plane, verticale. Secțiunea transversală a filmului de lichid de densitate ρ , și vâscozitate η , este prezentată în figura 1. Vaporii saturați de lichid condensează la temperatura de saturație T_{sat} datorită temperaturii mai scăzute a peretelui plăcii verticale, T_p . Grosimea filmului de condens, δ , crește de-a lungul plăcii, deci al axei x , ca urmare a curgerii filmului sub acțiunea forței gravitaționale. Deci, vitezele pe direcțiile y și z , v_y și respectiv, v_z , sunt neglijabile în comparație cu cea pe direcția x , v_x . De asemenea, gradientii de viteză și temperatură sunt semnificativi doar pe direcția y , cei corespunzători direcțiilor x și z , fiind neglijabili. Presiunea în masa vaporilor este constantă, astfel încât $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$. Cele trei ecuații ale curgerii se reduc la una singură, pe direcția x , care, ținând cont de absența tensiunilor de forfecare la interfața gaz-lichid, ia forma:

$$\eta \frac{d^2 v_x}{dy^2} = -\rho g \quad (2)$$

Ecuția (2) indică că forțele vâscoase sunt echilibrate de cea gravitațională și poate fi integrată utilizând condiții la limită la perete și la interfața vaporii-lichid descrise de ecuațiile (3):

$$\begin{aligned} y = 0 & \quad v_x = 0 \\ y = \delta_x & \quad \frac{dv_x}{dy} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

în vederea obținerii profilului vitezei în film:

$$v_x = -\frac{\rho g y}{\eta} \left(\frac{y}{2} - \delta_x \right) \quad (4)$$

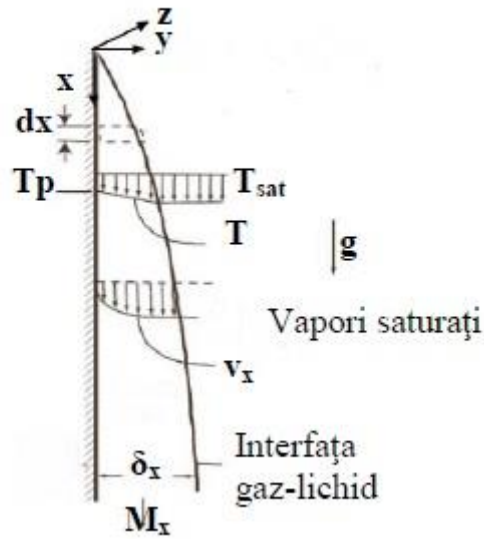


Figura 6.1 Condensarea pe o placă verticală conform teoriei lui Nusselt

Debitul masic de lichid pe unitate de lățime a filmului este:

$$M_x = \rho \bar{v}_x \delta_x = \rho \delta_x \frac{1}{\delta_x} \int_0^{\delta_x} v_x dy = \frac{\rho^2 g \delta_x^3}{3\eta} \quad (5)$$

Diferențierea ecuației (5) generează expresia:

$$\frac{dM_x}{dx} = \frac{\rho^2 g \delta_x^2}{\eta} \frac{d\delta_x}{dx} \quad (6)$$

Bilanțul energetic realizat pe un element de film de înălțime dx în Figura 6.1, implică egalitatea dintre fluxul de căldură latentă eliberat în urma condensării debitului dM_x de vapori și fluxul de căldură transferat conductiv prin film:

$$r \cdot dM_x = -\lambda \frac{dT}{dy} dx \quad (7)$$

unde r este căldura latentă de condensare a vaporilor și λ , coeficientul de conductivitate termică a filmului de lichid.

Se poate scrie:

$$\frac{dT}{dy} = \frac{T_{sat} - T_p}{\delta_x} \quad (8)$$

și înlocui în (7), obținându-se expresia gradientului de debit:

$$\frac{dM_x}{dx} = -\frac{\lambda(T_{sat} - T_p)}{r\delta_x} \quad (9)$$

Din egalitatea ecuațiilor (6) și (9) pentru gradientul de debit de lichid, rezultă ecuația diferențială:

$$\delta_x^3 \frac{d\delta_x}{dx} = \frac{-\eta\lambda(T_{sat} - T_p)}{\rho^2 gr} \quad (10)$$

În relația obținută, se separă variabilele și se integrează, soluția fiind dată de expresia:

$$\delta_x = \left[\frac{4\lambda\eta(T_{sat} - T_p)x}{\rho g(\rho - \rho_g)r} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (11)$$

În cazul condensării, convecția căldurii de-a lungul axei x este neglijabilă în comparație cu conducția prin filmul de lichid. În aceste condiții, gradientul de temperatură în film este aproximativ liniar, iar coeficientul de transfer de căldură este λ/δ_x . Deci, coeficientul de transfer de căldură la condensarea vaporilor de-a lungul unei plăci verticale sub formă de film în curgere laminară, fără valuri este:

$$\alpha = \left[\frac{\rho g(\rho - \rho_g)\lambda^3 r}{4\eta(T_{sat} - T_p)x} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (12)$$

Valoare medie a coeficientului de transfer de căldură la condensare între $x=0$ și $x=H$ este:

$$\bar{\alpha} = 0,943 \cdot \left[\frac{\rho g(\rho - \rho_g)\lambda^3 r}{4\eta(T_{sat} - T_p)H} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (13)$$

Proprietățile din ecuație se iau la temperatura medie a filmului de condens $T_{sf}=(T_{sat} + T_p)$, cu excepția căldurii latente de condensare r luată la temperatura de condensare T_{sat} .

Ecuația lui Nusselt dă rezultate bune cu erori mai mici de 3% pentru un film de condens în curgere laminară pe o placă verticală, la presiuni joase ($\rho_v \ll \rho_g$), $c_{pl}(T_{sat} - T_p)/r \leq 0,1$ și $1 \leq Pr \leq 100$.

Kutateladze recomandă amplificarea coeficientului din ecuația (13) cu 20%:

$$\bar{\alpha} = 1,15 \cdot \left[\frac{\rho g(\rho - \rho_g)\lambda^3 r}{4\eta(T_{sat} - T_p)H} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (14)$$

În cazul condensării peliculare, în regim laminar cu ondularea suprafeței, se recomandă corectarea ecuației (13) cu un coeficient ε_0 dat de relația:

$$\varepsilon_0 = (\text{Re} / 4)^{0,04} \quad (15)$$

cu Re - criteriul Reynolds, calculat cu ecuația $Re = [4\alpha H(T_{sat} - T_p)]/r$, iar dacă proprietățile fizice ale fluidului în pelicula de condensat variază semnificativ se introduce și un coeficient ε_t dat de ecuația:

$$\varepsilon_t = \left[\left(\frac{\lambda_p}{\lambda} \right)^3 \frac{\eta}{\eta_p} \right]^{1/8} \quad (16)$$

unde λ și η au semnificațiile menționate anterior, cele fără indice fiind calculate la temperatura medie a filmului de condens, iar cele cu indicele "p" determinate la temperatura peretelui T_p .

Ținând cont de cele două corecții, noul coeficient de transfer de căldură devine:

$$\bar{\alpha}_c = \bar{\alpha} \varepsilon_o \varepsilon_t \quad (17)$$

Coeficientul mediu de transfer de căldură la condensarea pe un tub înclinat cu unghiul φ față de orizontală, de diametru D , se obține prin înlocuirea termenului accelerației gravitaționale g din ecuația (13) cu componenta acesteia, $g \sin\varphi$, iar particularizarea pentru un tub orizontal conduce la rezultatul:

$$\alpha = 0,729 \cdot \left[\frac{\rho g (\rho - \rho_g) \lambda^3 r}{\eta (T_{sat} - T_p) D} \right]^{1/4} \quad (18)$$

În cazurile de proiectare a schimbătoarelor de căldură, înălțimea țevilor este o mărime necunoscută, caz în care ecuația (14) este pusă într-o formă echivalentă dedusă pe baza ecuației de egalitate a fluxurilor schimbate:

$$Q_s = rM_m = \alpha A \Delta T = \alpha (n \pi D H) \Delta T \quad (19)$$

în care M_m este debitul de vapori în kg/s și n numărul total de țevi. Substituind produsul $H \Delta T$ în ecuația (13) sau $D \Delta T$ în (18), se obține:

$$\alpha = 3,78 \lambda^3 \sqrt[3]{\frac{\rho^2 D n}{\eta M_m}} \quad (20)$$

pentru suprafețe verticale, și, respectiv:

$$\alpha = 2,02 \lambda^3 \sqrt[3]{\frac{\rho^2 H n}{\eta M_m}} \quad (21)$$

pentru suprafețe orizontale.

La curgerea peste un fascicul de țevi orizontale cu N rânduri, Miheev recomandă utilizarea unei corecții de forma:

$$\varepsilon_f = \frac{1}{\sqrt[4]{N}} \quad (22)$$

Kutateladze propune un calcul mai precis al valorii coeficientului de convecție pentru fiecare rând folosind relația:

$$\frac{\bar{\alpha}_n}{\alpha_1} = \left(\frac{\sum_{i=1}^n M_i}{M_n} \right) \quad (23)$$

unde M_i este debitul de vapori condensați pe rândul i .

Valoarea medie a coeficientului de transfer de căldură pentru un fascicul de țevi orizontale (v.ecuația (21)) este mai mică decât cea pentru suprafețe verticale (v.ecuația (20)), fapt explicabil prin îngroșarea filmului de condens în urma prelingerii acestuia de pe rândurile superioare pe cele inferioare.

În curgerea peliculară a filmului de condens pe o suprafață verticală, literatura de specialitate [Kutateladze, 1963] propune o serie de ecuații funcție de caracteristicile zonei de curgere:

-pentru zona laminară fără valuri, $Re_x \leq 30$:

$$\frac{\alpha(v/g)^{1/3}}{\lambda} = 1,47 Re_x^{-1/3} \quad (24)$$

-pentru zona laminară cu valuri, $30 \leq Re_x \leq 1800$:

$$\frac{\alpha(v/g)^{1/3}}{\lambda} = \frac{Re_x}{1,08 Re_x^{1,22} - 5,2} \quad (25)$$

-pentru zona turbulentă, cu valuri, $Re_x \geq 1800$:

$$\frac{\alpha(v/g)^{1/3}}{\lambda} = \frac{Re_x}{1,08 Re_x^{1,22} - 5,2} \quad (26)$$

în care membrul stâng este de fapt numărul Nusselt modificat.

Subiectul condensării nu poate fi încheiat fără o succintă prezentare a factorilor care o influențează, cei mai importanți fiind prezența gazelor necondensabile în vapori și viteza de curgere a vaporilor în spațiul de condensare.

Prezența gazelor necondensabile în vaporii ce condensează diminuează semnificativ valoarea coeficientului de transfer de căldură. Aceasta se explică prin faptul ca vaporii în

deplasarea lor către suprafață, antrenează gazele necondensabile, astfel încât pelicula de gaze formată lângă suprafață constituie o rezistență în plus la transferul de căldură. De exemplu 10% de aer prezent în vaporii de apă ce condensează pot reduce cu peste 50% valoarea coeficientului de transfer de căldură. Cu cât concentrația gazelor necondensabile este mai mare, cu atât scăderea valorii α este mai mare. O ecuație empirică care demonstrează acest fapt este:

$$\frac{\alpha_{vg} - \alpha_g}{\alpha_v - \alpha_g} = \exp\left[-k \frac{x_g}{1 - x_g}\right] \quad (27)$$

în care α_{vg} reprezintă coeficientul de transfer de căldură pentru amestecul vaporii saturați-gaz, α_v și α_g sunt coeficienți de transfer căldură pentru vaporii și, respectiv, gaz în stare pură, x_g fracția molară de gaz din amestec, k este un coeficient ce depinde de natura amestecului, de exemplu pentru vaporii apă-aer, $k=1,1$. Eliminarea gazelor necondensabile din masa vaporilor se poate face prin amplasarea unui racord la partea superioară a camerei de încălzire a utilajului.

Viteza de curgere a vaporilor are în genere o influență pozitivă asupra transferului de căldură la condensare atunci când vaporii circulă în același sens sau în sens contrar cu condensul, dar întotdeauna la viteze mari, în aceste cazuri înregistrându-se o micșorare a grosimii filmului de lichid, deci o creștere a lui α . La viteze mici de $v_v=2\div 10\text{m/s}$, când vaporii se deplasează în sens opus curgerii condensului, grosimea filmului crește, deci α scade. Toate ecuațiile de calcul a coeficientului de transfer de căldură sunt aplicabile în cazul condensării vaporilor stagnanți sau cu viteze mici de deplasare. În cazul unor viteze semnificative ale vaporilor, la condensarea pe țevi verticale, calculul coeficientului de transfer de căldură se poate face folosind relația:

$$Nu = \frac{\alpha H}{\lambda} = \frac{\sqrt{2}}{3} \left(\frac{\rho v_v H}{\eta} \right)^{0,5} \frac{2 + (1 + G)^{0,5}}{\left[1 + (1 + M)^{0,5} \right]^{0,5}} \quad (28)$$

unde $G = \frac{16gH\eta r}{v_v \lambda (T_{sat} - T_p)}$, ρ , η , λ sunt densitatea, vâscozitatea dinamică și conductivitatea termică pentru condens, H -înălțimea țevii.

FIERBEREA

Transformarea unui lichid în stare de vaporii la interfața lichid-vaporii se numește evaporare, iar fierberea presupune o evaporare în toată masa lichidului, cu consum de căldură din exterior. Un lichid pur supus încălzirii prin intermediul unei suprafețe solide fierbe când temperatura acesteia, T_p , este semnificativ mai mare decât temperatura lui de fierbere sau de saturație, T_{sat} . Fierberea poate apare în lichide staționare, caz în care se numește *fierbere convectivă liberă* sau în lichide aflate în convecție forțată, caz în care ne referim la *fierbere convectivă forțată*.

Fierberea convectivă liberă. Curba de fierbere

Deși un număr mare de investigatori au pus în evidență diverse regiuni în fierberea convectivă liberă, Nukiyama a realizat investigații sistematice în acest domeniu, folosind fire din platină și aliaj nichel-crom încălzite electric, obținând o curbă de fierbere pentru apă. Figura 6.2 prezintă o astfel de curbă cu câteva dintre caracteristicile structurale ale fierberii.

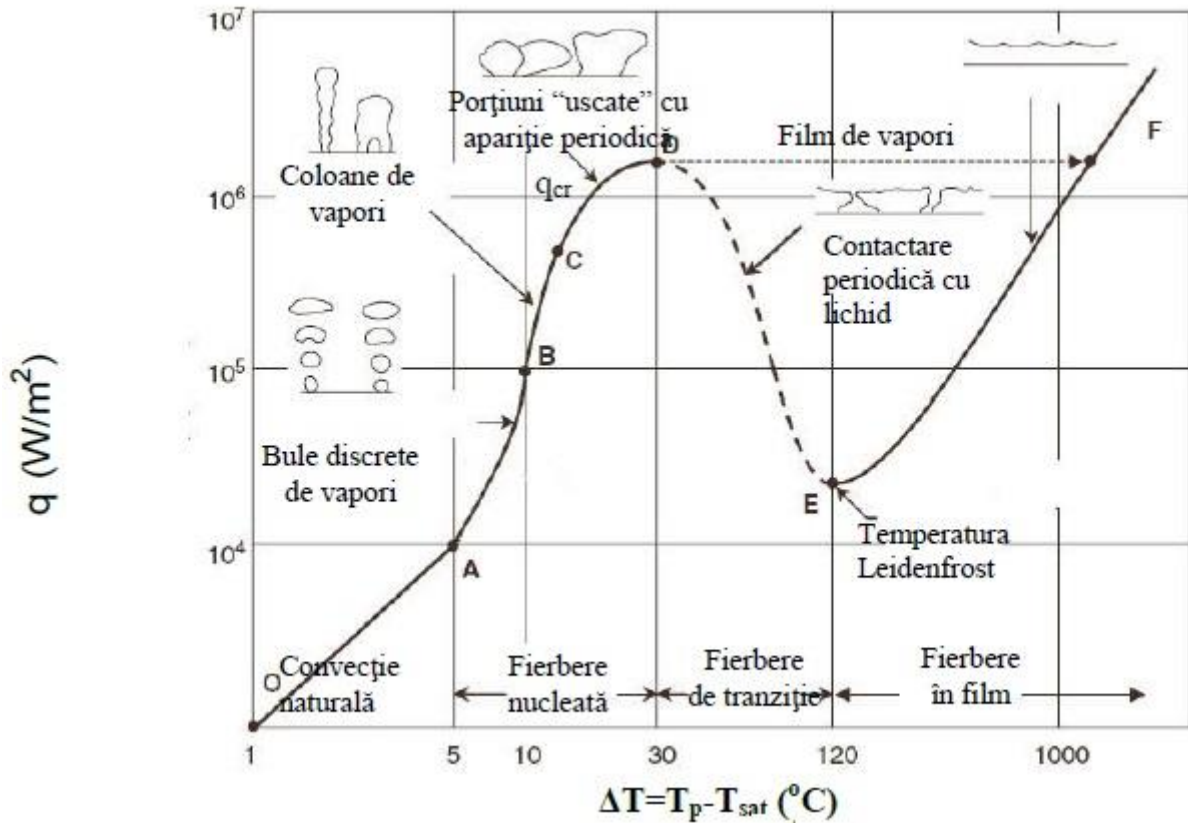


Figura 6.2 Curba de fierbere pentru apă

Fluxul de căldură schimbat q este reprezentat funcție de excesul de temperatură ΔT_{sat} , calculat ca diferența dintre temperatura suprafeței solide, T_p , și cea de fierbere caracteristică lichidului, T_{sat} , la presiunea existentă.

În regiunea O-A din Figura 1, la valori mici ΔT_{sat} , căldura transferată determină apariția *convecției naturale* în masa de lichid. În punctul A, în cavitățile suprafeței solide începe procesul de nucleație a bulelor, adică de apariție a unor centre de evaporare. Panta curbei dincolo de acest punct crește odată cu excesul de temperatură ΔT_{sat} . Pe măsură ce bulele se dezvoltă iar frecvența lor de generare crește, numărul centrelor de nucleație crește (regiunea înspre punctul B) și treptat, se atinge regimul de fierbere nucleată deplin dezvoltată (regiunea B-C). La fluxuri de căldură mai mari, suprafața solidă devine supraaglomerată cu bule în diverse stadii de dezvoltare. Evaporarea intensă de la baza bulelor conduce la formarea periodică a unor zone "uscate" pe suprafața solidă

care este totuși periodic scădată de lichid (regiunea C-D). Acest fenomen se reflectă într-o diminuare a coeficientului de transfer de căldură la fierbere și ca urmare, o scădere a pantei curbei de fierbere, după cum se observă și în figura 1. Fluxul de căldură corespunzător atinge un maxim în punctul D și este numit flux critic, q_{cr} . La valori ΔT_{sat} mai mari decât cele corespunzătoare acestui punct, forma curbei de fierbere depinde de modul de încălzire al suprafeței de schimb termic. Astfel dacă încălzirea se face la flux termic constant, în momentul apariției zonelor de fierbere peliculară, creșterea de temperatură în acele zone este explozivă și are loc arderea suprafeței de schimb termic. Fenomenele descrise corespund regiunii D-F pe curba de fierbere și trebuie evitate în special în situațiile în care se lucrează cu fluxuri mari de energie (reactoare nucleare, instalațiile energetice etc.), putând conduce la accidente grave. Dacă însă distribuția temperaturii de-a lungul peretelui se menține constantă, curba fierberii parcurge calea D-E-F. Regiunea D-E de pe curba de fierbere corespunde unei *zone de tranziție* sau *zonei de fierbere în film instabil*, în care fenomenele de formare a unor zone uscate și reudare a acestora se succed extrem de rapid. În punctul E, numit și punctul lui Leidenfrost, reudarea nu mai poate fi menținută și suprafața solidă este acoperită de un film stabil de vapori, fluxul de căldură transferat conductiv atingând o valoare minimă, q_m . Regiunea E-F corespunzătoare fierberii în film este caracterizată de o creștere a fluxului termic explicată prin evaporarea picăturilor lichide existente în stratul de vapori cât și prin transferul de căldură prin mecanism radiativ. În concluzie, curba de fierbere cuprinde patru zone, și anume:

1. Regiunea de convecție naturală - este caracterizată de convecția naturală unifazică în masa lichidului aflat la temperatura de saturație cu generare de bule pe suprafața solidă.
2. Fierberea nucleată - intervine convecția naturală bifazică lichid-vapori cu procesele de nucleație, creștere și desprindere a bulelor de vapori de pe suprafața solidă.
3. Fierbere de tranziție - este un regim intermediar între fierberea nucleată și fierberea în film.
4. Fierberea în film - este caracterizată de existența unui strat stabil de vapori ce se formează între suprafața solidă și masa de lichid în fierbere.

Fierberea convectivă forțată

La curgerea unui lichid printr-o conductă încălzită la temperaturi ce depășesc temperatura de fierbere, se formează un amestec de vapori și lichid, astfel încât curgerea monofazică devine bifazică. Câteva dintre principalele mărimi care caracterizează o astfel de curgere sunt:

-titlul masic definit ca raportul dintre debitul de vapori, M_v și debitul total de amestec, M_{am} :

$$x = M_v / M_{am} \quad (1)$$

-titlul volumic ce reprezintă raportul între volumul ocupat de faza de vapori, V_v , și volumul amestecului, V_{am} , respectiv raportul între aria secțiunii conductei ocupat de vapori, S_v , și aria secțiunii conductei, S :

$$B = V_v / V_{am} = S_v / S \quad (2)$$

-entalpia amestecului bifazic dată de relația:

$$i = i_{l,sat} + xr = i_{v,sat} - (1-x)r, \text{ kJ/kg} \quad (3)$$

unde $i_{l,sat}$ și $i_{v,sat}$ sunt entalpiile lichidului și respectiv, a vaporilor, la saturație, iar $r = i_{v,sat} - i_{l,sat}$ este căldura latentă de vaporizare.

- titlul termodinamic definit pe baza entalpiei amestecului:

$$x_t = (i - i_{l,sat}) / r \quad (4)$$

și care poate avea o valoare pozitivă dacă $i > i_{l,sat}$, caz în care este egal cu titlul masic, sau negativă dacă lichidul se află la o temperatură mai mică decât temperatura de fierbere.

În continuare, se prezintă diferitele zone de curgere și transfer termic care apar în cazul unei curgeri bifazice, v. Figura 6.3, la convecția forțată a unui lichid printr-o conductă cilindrică uniform încălzită în condiții de fierbere, subrăcit la intrare și transformat în vapori supraîncălziți la ieșire. La intrarea în conductă, lichidul este subrăcit ($x_t < 0$) iar temperatura peretelui este mai mică decât temperatura de saturație astfel încât nu există condiții de apariție a fierberii. Curgerea este monofazică și transferul de căldură se realizează prin mecanism convectiv. Coeficientul de transfer de căldură crește ușor ca urmare a variației proprietăților cu creșterea temperaturii de-a lungul conductei. Odată ce temperatura peretelui atinge temperatura de fierbere sau saturație, procesul de nucleație nu este inițiat imediat (v. poziția punctului IFN=Inițierea Fierberii Nucleate în raport cu punctul pentru care $T_p = T_{sat}$) fluxul de la perete fiind necesar pentru activarea cavitațiilor existente pe perete. Bulele de vapori formate la perete (v. punctul GNV- generare netă de vapori) cresc, se desprind și se deplasează în masa de fluid, condensând. Pe măsură ce tot mai multe centre sunt activate, contribuția fierberii nucleate la transferul de căldură crește, în schimb contribuția mecanismului de transfer convectiv corespunzător masei lichide scade. Temperatura masei de fluid crește în direcția de curgere, astfel încât în masa de lichid se formează din ce în ce mai multe bule, din punct de vedere hidrodinamic predomină un regim al *curgerii în bule*. Titlul termodinamic este în continuare negativ. Această regiune corespunde *fierberii nucleice parțiale sau subrăcite*.

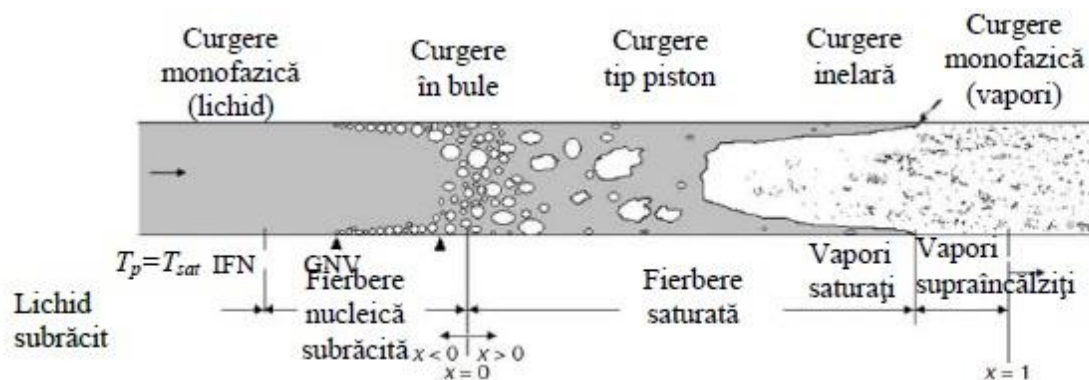


Figura 6.3 Fierbere convectivă forțată la curgerea printr-o conductă circulară

Când contribuția convectivă monofazică la transferul de căldură devine ne semnificativă, se stabilește regimul de *fierbere nucleică deplin dezvoltat* sau *fierbere saturată*. Acest regim de fierbere acoperă regiunea în care temperatura peretelui depășește temperatura de saturație a lichidului și titlul termodinamic de echilibru respective, fracția masică de vapori, sunt cuprinse între 0 și 1.

Bulele generate cu o frecvență crescândă coalescează în masa de lichid, formând “dopuri” caracteristice *curgerii de tip “piston” (slug)*. Când debitul de vapori generat crește ocupând întreaga regiune centrală a conductei pe a cărei pereți curge un film de lichid de grosime continuu descrescătoare, *curgerea devine inelară*. Titlul volumic crește mult. Transferul de căldură se realizează prin convecție în pelicula de lichid și prin vaporizarea picăturilor dispersate.

Pelicula de lichid se subțiază, pe perete rezultând o micropeliculă care în final se distruge, peretele venind în contact direct cu vaporii. În acest caz coeficientul de convecție scade brusc, ca urmare înregistrându-se un salt al temperaturii peretelui. Fenomenul este cunoscut sub denumirea de *criză a fierberii prin uscarea filmului de lichid (“dryout”)*.

Conducta conține doar picături fine de lichid ce se deplasează în faza de vapori, caz în care avem o *curgere monofazică a vaporilor* sau o *curgere tip ceață (“mist flow”)*. Transferul de căldură este predominant monofazic cu vaporizarea picăturilor dispersate. Când procesul de vaporizare se încheie, titlul atinge valoarea 1.

Dacă conducta este în continuare încălzită, vaporii saturați uscați sunt supraîncălziți, iar convecția termică este din nou monofazică.

Distribuția fazelor lichidă și de vapori în conductă joacă un rol important în calculul căderilor de presiune și a transferului de căldură la fierbere, fiind diferită funcție de poziția conductei, verticală sau orizontală. Regimurile de curgere prezentate în figura 2 corespund unei conducte orizontale, cu mențiunea că pot exista și alte regimuri de curgere, de exemplu cel stratificat, pentru valori mici ale debitelor de lichid și vapori. Într-o conductă verticală, pe lângă regimurile prezentate anterior apar o serie de modificări datorate acțiunii forțelor gravitaționale și arhimedice.

Astfel, apare un regim în care fazele lichidă și de vapori formează un amestec bifazic caracterizat de o turbulență accentuată. De asemenea, într-o conductă verticală, în regimul tip piston apar distorsiuni ale “dopurilor” de vapori datorită acțiunii forței arhimedice, iar regimul stratificat nu este prezent. În plus, există anumite diferențe la curgerea ascendentă sau descendentă a fazelor, în special la viteze relativ mici de curgere.

Calculul coeficienților individuali de transfer de căldură la fierbere

Fierberea este un proces complex caracterizat pe anumite intervale de structuri convective lichid-vapori haotice și care depinde de un număr mare de factori. De aceea, ecuațiile criteriale propuse pentru determinarea coeficientului individual de transfer de căldură la fierbere au o precizie și aplicabilitate reduse.

Pentru calculul coeficientului individual de transfer de căldură la fierberea cu convecție naturală, există ecuații criteriale propuse pentru fiecare regiune a curbei de fierbere, depinzând de natura sistemului.

În cazul unor temperaturi ridicate ale peretelui ($T_p \geq 300^\circ\text{C}$) la transferul de căldură pe lângă efectul convecției libere se adaugă și cel al radiației, astfel încât coeficientul total de convecție este dat de relația:

$$\alpha_{tot} = \alpha_{conv} + \alpha_{rad} \quad (5)$$

cu α_{conv} calculat folosind o ecuație criterială adecvată și α_{rad} determinat cu ecuația:

$$\alpha_{rad} = \frac{\varepsilon \sigma_o (T_p^4 - T_{sat}^4)}{T_p - T_{sat}} \quad (6)$$

unde ε este factorul de emisie al peretelui, σ_o este factorul de emisie al corpului negru, $\sigma_o = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}^4)$ constanta Boltzman.

În calculul coeficientului de convecție la fierberea cu convecție forțată se iau în considerație atât efectul fierberii cât și cel al convecției forțate, și anume se calculează coeficientul de convecție la fierberea nucleică în volum mare, α_{vm} și coeficientul de convecție la curgerea monofazică lichidă, α_{cf} , diverși autori propunând diferite relații de combinare a celor doi coeficienți.

Factorii care influențează fierberea

1. Convecția forțată

Domeniul fierberii în convecție liberă se caracterizează prin valori ale coeficientului de transfer de căldură relativ mici comparativ cu domeniul fierberii nucleate (v. regiunea A-C de pe curba de fierbere din figura 1). Intensificarea transferului de căldură în această zonă (OA) se poate

realiza folosind convecția forțată adică transportul fazei lichide în fierbere cu ajutorul unei pompe. La viteze de minim 2 m/s, se constată o creștere a coeficientului de transfer de căldură de 4-6 ori.

2. Proprietăți ale suprafeței de încălzire:

- rugozitatea accentuată a suprafeței favorizează fierberea în bule, numărul centrelor de formare ale bulelor de vapori fiind mult mai mare la o suprafață rugoasă față de una netedă. În timp, rugozitatea suprafeței se poate diminua astfel încât pentru a asigura o influență constantă a rugozității asupra fierberii, se apelează la diferite metode cum ar fi:

- acoperirea suprafețelor cu un material poros prin depuneri electrolitice, prin sinterizare, prin depuneri de picături de metal topit etc.
- mecanic, prin imprimarea pe suprafață a unor cavități de geometrii diverse.

Fierberea în recipiente de laborator se poate intensifica și uniformiza prin utilizarea unor granule poroase inerte, gazele din porii acestora favorizând apariția centrelor de fierbere.

- forma și dimensiunile suprafeței de fierbere (ca și înălțimea stratului de lichid) contribuie la generarea unor curgeri libere în masa de lichid influențând fierberea. În general, suprafețele verticale la fierberea în convecție liberă generează mai puțini vapori decât cele orizontale.

- depunerile solide pe suprafață constituie rezistențe termice suplimentare la transferul de căldură astfel încât intensitatea acestuia este diminuată.

3. Natura fluidului influențează transferul de căldură la fierbere funcție de proprietățile acestuia ρ , η , unghi de udare al frontierei solide de către faza lichidă, σ .

Lichidele neumectabile sunt caracterizate de o fierbere în film cu valori diminuate ale lui α . Adăugarea de substanțe tensioactive micșorează σ , intensificând procesul de transfer de căldură cu până la 30%.

6.2. Transfer de masă însoțit de transfer de căldură - absorbția

Absorbția este procesul de extracție selectivă a uneia sau mai multor componente dintr-un amestec gazos folosind un absorbant lichid (absorbant). Procesul invers – eliberarea gazelor dizolvate din absorbant – se numește desorbție.

Procesele de absorbție implică două faze – lichidă și gazoasă. Atunci când acestea sunt în contact, o componentă (sau mai multe) trece dintr-o fază în cealaltă. În prezența unei componente (componente) practic insolubile în faza lichidă din faza gazoasă, aceasta este numită gaz inert sau gaz purtător. O componentă care se dizolvă este numită componentă absorbită.

Absorbția poate avea loc fie prin dizolvarea gazului în lichid-absorbție fizică, fie printr-o reacție chimică între gaz și absorbant-chemosorbție. În ambele cazuri absorbția este însoțită de efecte termice a căror mărime depinde de natura celor două faze și de concentrația componentilor.

Absorbția este utilizată pe scară largă în industria chimică și în industriile conexe. Se utilizează pentru extragerea componentelor valoroase din amestecul gazos și pentru purificarea amestecurilor gazoase de impurități înainte de utilizarea lor în procese tehnologice sau înainte de eliberarea lor în atmosferă.

Principalele aplicații ale adsorbției sunt: separarea CO₂ prin adsorbție în apă sub presiune sau în etanol-amina, separarea benzenului din gazele de cocserie prin absorbția în ulei de gudron, separarea oxigenului de azot din amestecul rezultat la sinteza amoniacului, separarea compușilor sulfurului. O aplicație importantă a absorbției o constituie controlul calității aerului. Alegerea absorbantului se realizează luând în considerare natura componentului separat, concentrația acestuia în amestecul gazos și gradul de separare dorit. Faza lichidă rezultată în urma adsorbției este de cele mai multe ori, supusă operației de desorbție iar lichidul este recirculat .

În practica industrială modernă, importanța procesului de absorbție este foarte mare pentru crearea tehnologiilor fără deșeuri.

Principalele probleme în implementarea absorbției sunt legate de selectarea absorbantului și de crearea unor condiții raționale pentru contactul dintre gaz și lichid.

La alegerea unui absorbant, există o serie de cerințe:

- Selectivitate, adică abilitatea de a absorbi selectiv componenta extrasă, cu solubilitatea minimă posibilă a gazului purtător în absorbant;
- Capacitate mare de absorbție, respectiv solubilitatea mare a componentei absorbite în faza lichidă în condiții de operare (ceea ce reduce consumul de absorbant);
- Volatilitate cât mai scăzută, adică elasticitate redusă a vaporilor absorbantului la temperatura de operare, pentru a evita pierderile acestuia odată cu gazul evacuat;
- Stabilitate în utilizare, adică absorbantul nu trebuie să sufere modificări – descompunere, oxidare, formare de mușci etc.;
- Conveniență în utilizare – netoxicitate, incombustibilitate, efect coroziv redus asupra echipamentelor;
- Disponibilitate și cost redus;
- Regenerabilitate ușoară în timpul desorbției.

Absorbții industriali nu îndeplinesc întotdeauna simultan toate aceste cerințe. Prin urmare, în practică, absorbantul este selectat în funcție de condițiile procesului (proprietățile și compoziția amestecului gazos, temperatura și presiunea gazului, gradul de purificare necesar etc.).

Bazele fizice ale procesului de absorbție

În procesele de absorbție fizică, sunt implicate cel puțin trei componente: două componente purtătoare (gaz și lichid) și o componentă care trece dintr-o fază în alta. Sistemul celor două faze ($\phi = 2$), având un număr total de componente $k=3$, conform regulii fazelor, are trei grade de libertate aplicate stării de echilibru:

$$\phi = k - \phi + 2 = 3 + 2 - 2 = 3 \quad (1)$$

În cazul insolubilității complete a gazului inert în absorbant și al volatilizării reduse a absorbantului, compoziția fazelor va fi complet caracterizată de concentrațiile componentei absorbite în fiecare dintre faze: x – în faza lichidă și y – în faza gazoasă. Parametrii stării de echilibru ai sistemului includ, de asemenea, temperatura și presiunea la care se află sistemul.

Astfel, numărul total de variabile ale sistemului de echilibru este 4. Pentru $\phi=3$, trei variabile pot fi alese arbitrar, conform condițiilor procesului tehnologic, iar cea de-a patra va fi dependentă.

De exemplu, se pot alege arbitrar temperatura și presiunea, precum și concentrația componentei absorbite în lichid (x). Atunci, pentru un astfel de sistem, concentrația de echilibru a acestei componente în faza gazoasă (y^*) va fi bine definită. O astfel de dependență a valorii y de x , la o anumită temperatură și presiune, se numește curba de echilibru – linia de echilibru sau curba echilibrului, conform Figurii 6.4.

$$y^* = f(x) \quad (2)$$

Să presupunem că un punct A, care caracterizează starea de lucru (neechilibru) a fazelor aflate în contact, se află deasupra liniei (curbei) de echilibru. Atunci, când sistemul se apropie de echilibru (în direcția săgeții 1), concentrația componentei absorbite în faza gazoasă va scădea, iar în faza lichidă va crește.

O astfel de schimbare a concentrației componentei A de interes în faze corespunde procesului de absorbție. Aceasta înseamnă că toate punctele situate deasupra și la stânga liniei de echilibru formează zona de absorbție.

Acum să presupunem că starea de operare a sistemului este caracterizată de un punct D (cu concentrațiile componentelor de interes A, x' și y'), situat sub linia de echilibru. Aici, dimpotrivă, când tinde spre starea de echilibru (în direcția săgeții 2), concentrația componentei absorbite în faza lichidă scade, iar în faza gazoasă crește, adică are loc un proces de desorbție. Zona de lucru, situată sub și la dreapta curbei de echilibru, se numește zona de desorbție.

Aceste curbe sunt denumite și *izoterme de absorbție*. Dacă temperatura sistemului t se modifică la t_1 , atunci valorii concentrației componentului A în lichid, x , îi va corespunde o nouă valoare y_1^* , iar valorii x' – valoarea y'^* . Cu creșterea temperaturii ($t_1 > t$), solubilitatea componentei absorbite (gaz) în lichid scade.

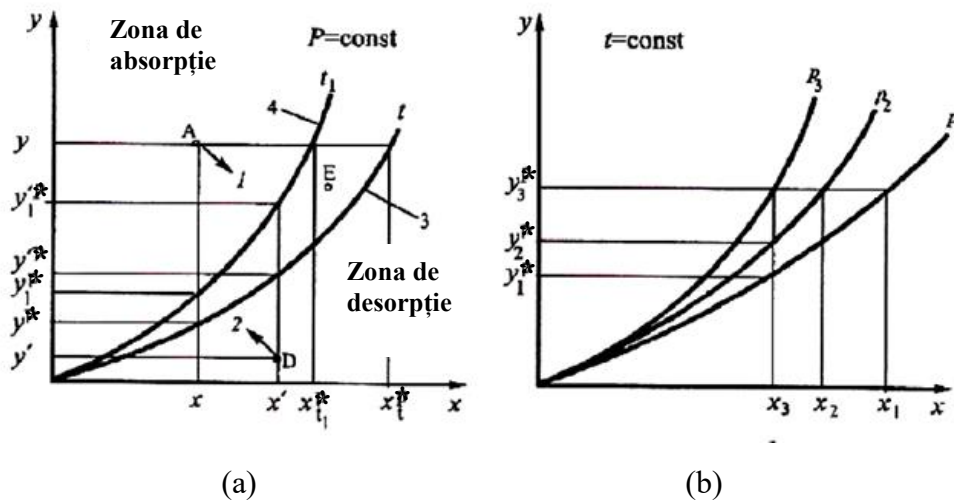


Figura 6.4 Diagramele echilibrului de fază gaz – lichid:
 (a) – pentru $p=\text{const}$,
 (b) – pentru $t=\text{const}$

Dacă punctul care caracterizează starea de funcționare a sistemului se află între două izoterme 3 și 4, de exemplu punctul E reprezentat în Figura 1, atunci în acest sistem va avea loc absorbția – la temperatura t (regiunea de absorbție deasupra izotermei 3) sau desorbția – la temperatura t_1 (regiunea de desorbție sub izoterma 4). Prin urmare, influențând temperatura sistemului, este posibil să se schimbe direcția procesului „absorbție-desorbție”.

Să analizăm acum influența presiunii totale P în sistemul gaz-lichid asupra distribuției de echilibru a componentelor între faze. Pentru concentrații mici ale soluției (când gazul se dizolvă în cantitate mică în lichid), se poate aplica legea lui Henry, conform căreia presiunea parțială de echilibru a componentei în faza gazoasă deasupra lichidului este proporțională cu conținutul gazului dizolvat în lichid:

$$p^* = k_H x$$

unde: p^* este presiunea parțială de echilibru a componentei de interes în gaz, mm Hg, k_H este constanta lui Henry (cu unități de măsură ca ale presiunii), x este conținutul gazului dizolvat în soluție (kg/kg absorbant).

Constanta lui Henry care caracterizează solubilitatea gazelor în lichid depinde de proprietățile gazului dizolvat și ale absorbantului, precum și de temperatură. Dependența de temperatură, cu o anumită aproximație, poate fi exprimată prin ecuația:

$$\ln k_H = c - \frac{\Delta H}{RT}$$

unde: ΔH este căldura de dizolvare a gazului, J/mol, R este constanta universală a gazului, J/(mol·K), T este temperatura absolută, K, c este o constantă determinată experimental.

Dacă gazele sunt foarte solubile și formează soluții cu concentrații mari, iar gazele sunt sub presiuni de zeci de atmosfere, echilibrul nu mai urmează legea lui Henry.

Pentru calcule tehnice, se folosesc valorile presiunii parțiale de echilibru a gazului P^* , obținute din experimente, iar conținutul de echilibru al componentei în amestecul gazos este calculat cu ecuația:

$$y^* = \frac{M}{M_{solv}} \cdot \frac{p^*}{P - p^*}$$

unde: M este masa moleculară a componentei de interes, M_{solv} este masa moleculară a purtătorului; P este presiunea totală a gazului deasupra lichidului, mm Hg.

INTENSIFICAREA TRANSFERURILOR DE CĂLDURĂ ȘI DE MASĂ

1 . Pornind de la ecuațiile de transfer de proprietate

Metodele de intensificare a proceselor de transfer rezultă din analiza proceselor elementare ce formează procesul global. În fiecare caz trebuie analizat procesul elementar determinant, adică are loc cu viteza cea mai mică, să se acționeze în sensul intensificării acestuia.

Multiplele direcții de acționare asupra intensificării operațiilor de transfer au condus la dezvoltarea unei game foarte variate, de la forme simple de intervenție în construcția aparatelor și circulația fluidelor până la tehnici de lucru complexe sau combinarea avantajelor a două tehnici de lucru diferite.

Transferurile interfazice de căldură și masă sunt caracterizate de ecuațiile:

$$Q_s = KA\Delta T_{med}$$

$$N_A = K_g A \Delta Y_{Amed}$$

$$N_A = K_l A \Delta X_{Amed}$$

Conform acestor expresii, intensificarea se poate realiza prin:

- mărirea coeficientului global de transfer de căldură K sau a coeficienților globali de transfer de masă (α_1, α_2) prin modificarea condițiilor hidrodinamice în sensul creșterii turbulenței, ceea ce duce la mărirea acestora (datorată dependențelor Nusselt de Reynolds, și respectiv, Shenvood de Reynolds din ecuațiile critice ale ale: transferului de căldură și respectiv, a transferului de masă). Mărirea coeficienților globali de transfer de căldură sau a celor de transfer de masă corespunde micșorării rezistenței totale a transferurilor, dacă se consideră ecuațiile de calcul a coeficienților globali:

$$K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + r_{dep1} + \frac{\delta}{\lambda} + r_{dep2} + \frac{1}{\alpha_2}}$$

$$K_g = \frac{1}{\frac{1}{k_g} + \frac{k_H}{k_l}}$$

$$K_l = \frac{1}{\frac{1}{k_l} + \frac{1}{k_H k_g}}$$

Se poate constata că pentru a mari valoarea lui K , trebuie mărită valoarea cea mai mică α_1 sau α_2 respectiv a lui k_g, k_l , adică micșorată cea mai mare rezistență a procesului global. Dacă se

intervine asupra altor factori, de exemplu se acționează în sensul micșorării celei mai mici rezistențe parțiale, rezultatele nu sunt satisfăcătoare, dat fiind că rezistența globală rămâne apropiată de valoarea celei mai mari rezistențe. Intensitatea schimbului de căldură dintre fluid și perete, caracterizat de α , poate fi mărită prin utilizarea unui regim turbulent, respectiv prin mărirea vitezei de curgere a fluidului dar și creșterea turbulenței.

Îmbunătățirea condițiilor hidrodinamice poate fi realizată în cazul transferului de căldură de exemplu prin utilizarea schimbătoarelor cu mai multe mersuri sau a schimbătoarelor cu șicane, iar în cazul evaporării, prin utilizarea evaporatoarelor cu circulație forțată. În cazul transferului de masă, condiții de hidrodinamice pot fi optimizate prin utilizarea coloanelor cu barbotarc, a coloanelor de extracție cu injector sau a unor coloane cu talere rotative, cu agitare etc. În general, îmbunătățirea condițiilor hidrodinamice se poate realiza prin utilizarea așa numiților promotori de turbulență sau de deplasare a fluidelor, procedee ce vor fi detaliate în cadrul metodelor pasive de intensificare dar și prin metode active. De asemenea, în unele cazuri, cum ar fi cele ce decurg cu schimbarea stării de agregare, poziția suprafeței, orizontală sau verticală, este caracterizată de valori α diferite. Astfel, la condensarea vaporilor în spațiul intratubular al unui schimbător de căldură, poziționarea orizontală a schimbătorului determină un coeficient u mai mare decât în cazul poziționării acestuia vertical.

Mărirea coeficientului global K se mai poate realiza și prin mărirea λ/δ - de obicei, în schimbătoarele de căldură acest raport are o valoare mare deoarece materialul din care se fac pereții schimbătoarelor au grosimi mici și conductivitate termică mare. De asemenea starea suprafeței cu care fluidele vin în contact este foarte importantă. Suprafața termică trebuie menținută curată, fără depuneri. Depunerile constituie rezistențe suplimentare la transferul de căldură conductiv.

Mărirea suprafeței de contactare a fazelor

Astfel în cadrul transferului termic, acest lucru este posibil prin utilizarea unor schimbătoare multitubulare cu mai multe mersuri, a unor schimbătoare cu plăci (suprafața plăcilor striată), schimbătoare spirale sau schimbătoare cu aripioare, iar în transferul de masă, utilizarea unor coloane cu umplutura, a unor vase cu agitare.

De asemenea, mărirea suprafeței de contact interfazic se poate realiza și prin divizarea fazelor, folosind metode pasive sau active.

Amplificarea potențialului transferului se poate realiza și prin impunerea unei circulații în contracurent a fluidelor sau a fazelor.

Dacă există în cazul transferului de căldură de exemplu mecanism radiativ, se urmărește mărirea coeficientului de emisie cu care este proporțional fluxul de schimb termic radiativ

2. Pornind de la ecuațiile criteriale

Criteriul Reynolds intervine în toate ecuațiile criteriale caracteristice transferului de căldură și respectiv de masă, prezentate mai jos, indicând o creștere a coeficienților individuali de transfer și implicit, al fluxului de proprietate transferat:

-transfer de căldură:

$$Nu = C Re^m Pr^n Gr^p (l_1^0)^r (l_2^0)^p \dots (l_n^0)^q$$

unde Nu este criteriul fundamental al transferului de căldură, deoarece conține coeficientul individual al transferului de căldură, α .

$$Nu = \frac{\alpha l}{\lambda}$$

-transfer de masă:

$$Sh = C Re^m Sc^n (l_1^0)^r (l_2^0)^p \dots (l_n^0)^q$$

unde Sh este criteriul fundamental al transferului de masă, deoarece conține coeficientul individual al transferului de masă, k .

$$Sh = \frac{kl}{D_{AB}}$$

În ecuațiile criteriale unde C , respectiv, m , n , p , r , q sunt constanta și respectiv, exponenții caracteristici fiecărei ecuații criteriale ce se aplică unui anumit sistem.

3. Pornind de la straturile limită hidrodinamic/termic/difuzional

În stratul limită hidrodinamic transferul de impuls se realizează la nivel microscopic, din aproape în aproape prin intermediul forțelor de frecare. În stratul limită termic, transferul de căldură se realizează prin mecanism conductiv prin intermediul unor gradienti de temperatură, iar în stratul limită difuzional, transferul de masa are loc prin difuzie moleculară, sub acțiunea unor gradienti de concentrație.

Inducerea de turbulență în vecinătatea frontierelor/interfețelor unde există straturi limită caracteristice transferului de proprietate, are ca efect reducerea acestora. Rezistența la transfer este proporțională cu grosimea stratului, astfel încât o diminuare a grosimii stratului conduce la o micșorare a rezistenței la transferul de proprietate prin acel film.

Selecție de probleme și aplicații numerice pentru pregătirea examenului

1. Explicați semnificația termenilor dintr-o ecuație diferențială aleasă ce caracterizează unul dintre transferurile de proprietate studiate. Deduceți o formă cât mai simplă, justificând toate simplificările. La ce poate fi folosită o asemenea ecuație?
2. Stabiliți distribuția vitezelor între două plăci plane, la curgerea unui fluid newtonian sub acțiunea unui gradient de presiune, în regim staționar, în zona de curgere stabilizată. Argumentați toate simplificările.
3. Să se determine expresia distribuției temperaturii într-un perete plan omogen, în interiorul căruia există o sursă de căldură uniform distribuită, al cărei flux termic este constant. Să se determine distribuția temperaturii precum și valoarea maximă a acesteia dacă se cunoaște că peretele este din cărămidă, $T_{p1}=80^{\circ}\text{C}$ și respectiv, $T_{p2}=20^{\circ}\text{C}$. Densitatea termică a sursei este de 10^4 W/m^3 . Grosimea peretelui este de 0,5m.
4. Să se stabilească distribuția temperaturii într-un perete cilindric de rază interioară R_1 și raza exterioară R_2 , dacă temperatura peretelui la interior este $T_{p1} > T_{p2}$.
5. Să se stabilească distribuția temperaturii în regim staționar, într-o conductă paralelipipedică cu pereți foarte groși și de lungime mică, L , în care intră un fluid cu temperatura $T_1 \gg T_2$, temperatura de ieșire a acestuia, cunoscând că în interiorul conductei există o sursă de energie termică, de densitate cunoscută, eV'' (W/m^3). Fluidul se deplasează după direcția x .
6. Joncțiunea unui termocuplu aproximată cu o sferă, este imersată în masa unui gaz pentru a determina temperatura acestuia. Coeficientul individual de convecție de partea gazului este de $400\text{ W/m}^2\text{K}$. Materialul joncțiunii are un coeficient de conductivitate termică de 20 W/mK , căldura specifică de 400 J/kg K și densitatea de 8500 kg/m^3 . Să se determine diametrul joncțiunii necesar pentru ca termocuplul să aibă o constantă de timp de 1s. Dacă joncțiunea are 25°C și este amplasată în masă gazului a cărei temperatură este de 200°C , după cât timp temperatura joncțiunii atinge valoarea de 199°C .

7. Să se determine durata de răcire pentru o placă din viniplast, cu dimensiunile 40x20x3 mm, supuse răcirii în aer cu temperatura de 0° C. Cunoscând că acestea trebuie răcite de la 30° C la 5° C. Răcirea plăcii se realizează în convecție forțată astfel încât $\alpha=100 \text{ W/m}^2\text{K}$. Să se determine temperatura în interiorul plăcii la $x/L=0,2$; 0,4 și respectiv la exteriorul plăcii ($x/L=1$). Să se determine cantitatea de căldură necesară a fi îndepărtată.

8. Să se determine durata de răcire a unor piese din oțel de formă paralelipipedică cu dimensiunile 7x63x55 mm care după un tratament termic au temperatura de 110° C iar după răcirea la care sunt supuse, trebuie să aibă o temperatură de 35° C. Pentru răcire se utilizează un curent de aer care circulă cu viteza 2,5 m/s și are temperatura de 30° C. $\alpha = 10 + 6\sqrt{v}$

9. Cunoscând durata de răcire de 16 ore a laptelui din bidoane de aluminiu cu raza de 25 cm de la temperatura inițială de 30° C, să se determine temperatura finală a laptelui dacă se utilizează apă cvasiglacială (1° C) în circulație naturală. Se dau coeficientul de conductivitate termică de 0,5 W/mK, coeficientul de difuzivitate termică $0.122 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, coeficientul parțial de transmitere a căldurii de la bidon la agentul de răcire de $230 \text{ W/m}^2\text{K}$. Să se determine cum se modifică timpul de răcire dacă se folosește apă glacială (0° C) și răcirea se face până la 5° C.

10. Explicați semnificația criteriului Biot și stabiliți care este semnificația criteriului $Bi \rightarrow 0$? Dar $Bi \rightarrow \infty$?

11. Se încălzesc 2400 kg/h apă de la temperatura inițială de 20° C până la o temperatură finală necunoscută, prin furnizarea unui flux termic de $1,8 \times 10^6 \text{ W}$. Să se afle temperatura finală a apei. Procesul are loc la presiunea atmosferică.

12. Un amestec ce conține apă și metanol curge printr-o conductă de diametru 83x3 mm la debite de 3000 kg/h și respectiv, de 4000 kg/h. Amestecul este încălzit până la evaporarea unuia dintre componenți. Să se determine fluxul termic necesar acestui proces, gradientul de presiune prin frecare utilizând corelația Lockhart-Martinelli, presupunând condiții adiabactice. Se dau vâscozitatea dinamică a vaporilor formați de $0,018 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$.

13. În cazul problemei anterioare, aplicați corelația Chisholm. Comparați rezultatele obținute prin folosirea celor două ecuații și stabiliți care dintre valori o veți utiliza în cazul unei dimensionări a unui utilaj de transport. Motivați!

14. Pentru același sistem stabiliți pe baza hărților de curgere, ce fel de structuri de curgere bifazică se regăsesc dacă amestecul se deplasează ascendent printr-o conductă verticală și respectiv, printr-o conductă orizontală. Utilizați hărțile corespunzătoare explicate la curs.

15. Un amestec lichid hexan (C_6H_{14}) – octan (C_8H_{18}), cu o temperatură de $25^\circ C$ curge printr-o conductă cu diametrul 50×5 mm, la un debit de 2600 kg / h (1200 kg / h C_6H_{14}). Conducta este supusă încălzirii prin furnizarea unui flux total de căldură de $221656,9$ W, în urma acestui proces formându-se un amestec bifazic.

1) Să se calculeze temperatura finală a amestecului bifazic și căderea de presiune pe unitatea de lungime de conductă.

2) Să se determine timpul necesar ca o placă din oțel, de grosime 40 cm, de temperatură inițială de $100^\circ C$, imersată în amestecul de lichid inițial, să atingă $26^\circ C$.

Se dau:

	C_6H_{14}	C_8H_{18}
Densitate lichid (kg/m^3)	654.8	611
Temperatura de fierbere ($^\circ C$)	68.8	125
Vascozitatea lichidului (Pa s)	$0.294 \cdot 10^{-3}$	$0.203 \cdot 10^{-3}$
Căldura specifică a lichidului (j/molK)	265.2	285
Căldura latentă de vaporizare (kj/mol)	28.85	34.20
Căldura specifică vapori (j/molK)	162	240.54
Vascozitatea vaporilor (Pa s)	$0.025 \cdot 10^{-3}$	$0.074 \cdot 10^{-3}$

Proprietățile oțelului:

Densitate: 7850 kg/m^3

Căldura specifică: 500 j/kgK

Coeficient de conductivitate termică: $17,5$ W/mK

Coeficientul individual de transfer de căldură: 800 W/m²K