Utilisation des nombres complexes

Dans toute la feuille, on se donne un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ du plan ***direct***.

Exercice 1 :

Déterminer géométriquement l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant la relation.

- $|z+1+4i|=4$
- $|z-2+3i|=|z-1-i|$
- $|\bar{z}+1-4i|=|z-2i|$
- $|3iz+6|=|z-1+i|$

Exercice 2 :

On associe le nombre complexe $Z=z^2$, pour tout $z\in\mathbb{C}$. On pose $z=x+iy$ et $Z=X+iY$, avec x , y , X et Y des réels.
1) Déterminer en fonction de x et de y, les parties réelle et imaginaire X et Y de Z.
2) Déterminer et représenter dans le plan complexe:
 a) l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z tels que Z soit un réel.
 b) l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M d'affixe z tels que Z soit un imaginaire pur.

Exercice 4 :

Soient , A, B et C trois points du plan d'affixes respectives :
$a=2+3i$, $b=5+7i$ et $c=-7-9i$
Démontrer que les points A, B et C sont alignés.

Exercice 5 :

Placer avec une règle et un compas, dans le plan complexe, les points d'affixes respectives :

- $a=1-i$
- $b=-2i$
- $c=\sqrt{3}-i$
- $d=\sqrt{3}+i$
- $e=1-i\sqrt{3}$
- $f=-\sqrt{3}-i$

Exercice 6 :

A tout nombre complexe différent de $1+i$, on associe le nombre complexe Z défini par :

$$Z=\frac{2z-2i}{z-1-i}$$

Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z telles que :
1) Z est réel.
2) Z est un imaginaire pur.

Exercice 7 :

Soit z un nombre complexe différent de 1.
On note $z'=1+z+z^2+z^3+z^4$
1) Montrer que $z'=\frac{1-z^5}{1-z}$

 Dans la suite de l'exercice, on pose $z=e^{\frac{2i\pi}{5}}$
2) Montrer que :

$$1+cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)+cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)+cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)=0$$

1) Montrer que $cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)=4cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)-2$
2) Montrer que $cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)+cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)=-2\,cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$
3) En déduire que $cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation du second degré $(E) : 4x^2-2x-1=0$

 En déduire la valeur exacte de $cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Exercice 8 :

Dans chacun des cas suivants, que peut-on dire des points A, B et C?

- $a = 2 + i$, $b = -11 + 2i$ et $c = -5 - 5i$
- $a = 2 + i$, $b = 1 + i$ et $c = 1 - i$
- $a = -1 + i\sqrt{3}$, $b = -1 - i\sqrt{3}$ et $c = 2$
- $a = -1 - 2i$, $b = -10 - 8i$ et $c = 2$

Exercice 9 :

A tout nombre complexe différent de $3i$, on associe le nombre complexe Z défini par :

$$Z = \frac{z + 2 - i}{z - 3i}$$

Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z telles que :

1) Z est réel.
2) Z est un imaginaire pur.

Exercice 10 :

A tout nombre complexe différent de $2 - i$, on associe le nombre complexe Z défini par :

$$Z = \frac{z + 1 + 3i}{z - 2 + i}$$

Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z telles que :

1) Z est réel.
2) Z est un imaginaire pur.

Exercice 11 :

Soient , A, B, C et D quatre points du plan d'affixes respectives :
$a = 2 - 2i$, $b = 1 - 5i$, $c = -2 - 6i$ et $d = -1 - 3i$

1) Placer ces quatre points dans un repère.
2) Conjecturer la nature du quadrilatère *ABCD.*
3) Démontrer la conjecture par la calcul.

Exercice 12 :

Soient , A, B, C et D quatre points du plan d'affixes respectives :
$a = -1$, $b = 1 + 2i$, $c = -1 + 4i$ et $d = -3 + 2i$

1) Placer ces quatre points dans un repère.
2) Conjecturer la nature du quadrilatère *ABCD.*
3) Démontrer la conjecture par la calcul.