Copyright © Tous droits réservés
Ce document, ou toute partie de celui-ci, ne peut être reproduit ou utilisé de quelque manière que ce soit sans l'autorisation écrite expresse du propriétaire.

Pourquoi faut-il toujours arriver en avance à l'aéroport ?

Bonjour à tous,

Pour mon grand oral, vous avez choisi que je vous explique pourquoi il faut toujours arriver en avance à l'aéroport ?

Ce n'est pas pour aller acheter les journaux, des sucreries ou boire un café. C'est surtout pour être certain de monter dans l'avion. Car bien que vous ayez acheté un billet en bonne et due forme, votre place dans l'avion n'est pas assurée…En effet les compagnies aériennes ont une pratique commerciale que vous ne connaissez peut-être pas : le surbooking.

Cela consiste finalement à vendre plus de billet que de places disponibles afin de remplir l'avion en cas d'absents ou de retardataires. On peut douter de la moralité de cette pratique mais surtout bien comprendre qu'il y a un risque pour la compagnie car si tous les passagers se présentent à l'embarquement, certains resteront à quai.

Je vais vous expliquer simplement ce qu'il se cache derrière la notion de surbooking et notamment les notions mathématiques qui s'y réfèrent.

Dans un avion, on considère que la présence d'un passager est indépendante de celle des autres. Ceci n'est pas tout à fait vrai car peu de passager voyage seuls. On va cependant considérer que choisir un passager au hasard dans un avion s'apparente à une répétition d'épreuve identiques et indépendantes de Bernoulli à deux issues contraires notés succès et échecs. Un succès est ici paradoxalement que le passager ne se présentent pas à l'embarquement.

Chez les Bernoulli, on était mathématicien de père en fils. La famille Bernoulli est une famille Bâloise (comme Leonhard Euler) qui a donné plusieurs mathématiciens dans l'histoire : Jacob, Jean et son fils Daniel. Celui qui nous intéresse ici est Jacob, aussi appelé Jacques.

Jacques Bernoulli (1654-1705) a travaillé sur les probabilités mais aussi dans de nombreux autres domaines. Il a par exemple découvert le nombre que l'on appellera e en calculant la limite : $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Il a également montré que $\sum\frac{1}{n}$ que l'on appelle la série harmonique était divergente et a participé au problème de Bâle. Il n' a pas pu trouver la valeur exacte de $\sum\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ mais a réussi à prouver que cette série convergeait et avait une valeur inférieure à 2.

Son frère Jean Bernoulli (1667-1748) a lui résolu le problème de la chainette, posé par son frère Jacques. Il travailla aussi sur les domaines physiques et fut partisan de la théorie du vortex de Descartes.

Son fils Daniel (1700-1782) était mathématicien mais aussi physicien et médecin. Il travailla aussi sur l'étude de la propagation de la petite vérole en mettant en place des outils statistiques.

Après ce petit point historique, revenons à ce qui nous intéresse, c'est quoi une épreuve de Bernoulli ?

Copyright © Tous droits réservés
Ce document, ou toute partie de celui-ci, ne peut être reproduit ou utilisé de quelque manière que ce soit sans l'autorisation écrite expresse du propriétaire.

Il y a alors deux paramètres à prendre en compte : le nombre de passager et la probabilité du succès. Rappelons qu'un succès est ici que le passager ne se présente pas à l'aéroport.

Pour un passager, on a une épreuve de Bernoulli, On note X_1 la variable aléatoire réelle qui compte le nombre de succès (soit aucun, soit un seul).

X_1suit une loi de Bernoulli notée $X_1 \rightsquigarrow B(1;p)$

La répétition de n épreuves de Bernoulli donne alors un schéma de Bernoulli. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès. Ainsi $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ est la somme de n variables aléatoires identiques et indépendantes.

X suit alors une loi Binomiale notée $X \rightsquigarrow B(n;p)$, de paramètres n et p. On a alors la formule qui permet de calculer les probabilités :

$$\forall k \in [|0;n|], P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Le nombre $\binom{n}{k}$ s'appelle le coefficient binomial. On peut calculer les coefficients binomiaux à la main à l'aide de la formule :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Pour en revenir à notre exemple, on détermine le nombre de chemin qui conduisent au même résultat. Par exemple, s'il n'y a qu'un seul passager absent, cela peut être le numéro 1, ou le 2 ou le 3 et ainsi de suite. Ainsi, il y a n possibilités de choisir un passager parmi n et donc on a alors : $\binom{n}{1} = n$

Pour pouvoir étudier notre problématique, Il nous faut des données numériques sur lesquelles nous appuyer.

En premier, qu'elle est la probabilité qu'un passager soit absent au décollage. La compagnie Easyjet a déclaré en 2016 que 3,5 % de ses passagers ne se sont pas présentés pour leur vol soit, quand même 7 passagers en moyenne, sur un vol de 200 places.

Chaque compagnie connait la valeur de son taux d'absentéisme mais peu communique dessus.

Nous sommes dans l'étude d'un cas général mais ce chiffre de 3,5 % est une moyenne. Il y a peu de chance d'avoir le même taux sur des vols longs courriers (pour des vacances par exemple) que pour des vols intérieurs (pour des déplacements professionnels) où les annulations peuvent être plus fréquentes. De la même manière, il y a probablement plus d'absents sur un vol qui part à 6 h 30 (panne de réveil par exemple) que sur un vol à 15 h.

Pour notre étude, on va considérer un avion avec 200 places pour simplifier les calculs avec une probabilité de 3,5 % que le passager ne se présente pas.

Dans ces conditions, la compagnie décide de prendre le risque de vendre 205 billets alors qu'elle ne dispose que de 200 sièges. Nous allons quantifier ce risque et regarder si c'est finalement avantageux financièrement pour elle.

Copyright © Tous droits réservés
Ce document, ou toute partie de celui-ci, ne peut être reproduit ou utilisé de quelque manière que ce soit sans l'autorisation écrite expresse du propriétaire.

On revient alors à la partie mathématique en notant X la variable aléatoire qui compte le nombre de passager absent. X suit donc une loi binomiale avec les paramètres suivants :

$n = 205$ et $p = 0{,}035$.

Ainsi, $\forall k \in [|0; 205|], P(X = k) = \binom{205}{k} 0{,}035^k (1 - 0{,}035)^{205-k}$

On a alors à l'aide de la calculatrice les résultats que je vous propose sur mon document support.

$P(X = 0) \approx 6{,}7 \times 10^{-4}$ soit 0 passager absent.

$P(X = 1) \approx 5 \times 10^{-3}$ soit 1 passager absent.

$P(X = 2) \approx 1{,}9 \times 10^{-2}$ soit 2 passagers absents.

$P(X = 3) \approx 4{,}5 \times 10^{-2}$ soit 3 passagers absents.

$P(X = 4) \approx 8{,}3 \times 10^{-2}$ soit 4 passagers absents

$P(X = 5) \approx 12{,}1 \times 10^{-2}$ soit 5 passagers absents.

Traduisons alors ces chiffres. Pour $(X = 4)$, il y a donc 4 passagers absents sur 205 et donc Il y a quand même un risque non négligeable que 201 passagers se présentent, évalué à 8, 2 %.

Il faut donc ici envisager de dédommager le passager lésé qui va rester à l'aérogare. Soit financièrement, soit en le logeant à l'hôtel pour une nuit. Un autre coût n'est pas quantifiable… Le passager décidera-t-il à l'avenir de prendre un nouveau billet avec la compagnie qui l'a laissé à quai ??

On choisit comme exemple numérique un vol à 200 € et un dédommagement à hauteur de 600 € soit trois fois le prix du billet initial pour justement éviter que le passager ne revienne plus.

Dans notre exemple, si 201 passagers se présentent, avec donc 1 passager lésé, la compagnie a vendu 5 billets de plus mais doit dédommager un passager. On peut alors estimer le gain dans cette situation à :

$$5 \times 200 - 600 = 400$$

En vendant 205 billets et en laissant un passager à quai, la compagnie gagne finalement 400 euros.

On va s'intéresser au gain algébrique de la compagnie en observant le montant du dédommagement qu'elle doit fournir

On regroupe alors dans un tableau les valeurs possibles.

Surplus	0	1	2	3	4	5	
Dédommagement	0	-600	-1200	-1800	-2400	-3000	Total
Probabilité	0,847	0,083	0,045	0,019	0,005	0,00067	1

D'où vient le résultat 0,847 par exemple? C'est la probabilité que 5 passagers soient absents sur les 205 au total. Finalement :

Copyright © Tous droits réservés
Ce document, ou toute partie de celui-ci, ne peut être reproduit ou utilisé de quelque manière que ce soit sans l'autorisation écrite expresse du propriétaire.

$P(X \leq 200) = 1 - P(X > 200)$

$P(X \leq 200) = 1 - P(X = 201) - P(X = 202) - P(X = 203) - P(X = 204) - P(X = 205)$

$P(X \leq 200) = 1 - (0{,}083 + 0{,}045 + 0{,}019 + 0{,}005 + 0{,}00067$

$P(X \leq 200) \approx 0{,}847$

Pour la loi de probabilité ci-dessus, on peut calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire dédommagement.

Ainsi $E(D) = -152$ euros, ce qui signifie qu'en moyenne, la compagnie devra rembourser 152 euros par vol.

On peut alors poser une autre variable aléatoire, celle relative au gain algébrique. On a ainsi : $G = 5 \times 200 - D$

Pourquoi 5×200 ? La compagnie 5 billets supplémentaires sur le vol.

Finalement, à l'aide de la linéarité de l'espérance mathématique, on obtient :

$E(G) = 1000 - E(D)$ soit donc $E(G) = 848$

Ainsi, en procédant de la sorte, la compagnie, en moyenne, va gagner 848 € supplémentaire par vol

On peut s'interroger sur l'intérêt d'une telle démarche pour les compagnies avec un gain qui semble modeste.

Par exemple, Air France commercialise chaque jour 1200 vols à travers le monde. En supposant que notre étude puisse s'appliquer à tous les vols, on peut imaginer un gain annuel pour la compagnie de $848 \times 1200 \times 365 = 371424000$

Ainsi, 374 millions d'euros pourraient être récupérés grâce au surbooking.

En conclusion,

J'ai choisi ici 205 billets mais on pourrait jouer sur le nombre de passager supplémentaires envisagés en augmentant ou en diminuant la valeur pour voir si on ne pourrait pas espérer davantage de gain.

On pourrait évidemment affiner le modèle en fonction des compagnies aériennes, des destinations, des horaires, du prix du billet ou de la date de réservation par exemple.

Il faudrait également connaitre plus précisément le pourcentage de passagers absents pour chaque compagnie. Bref beaucoup de paramètres à évaluer et à connaitre qui montre que les mathématiques ont encore de beaux jours devant elles.

Je vous remercie de m'avoir écouté.

Copyright © Tous droits réservés
Ce document, ou toute partie de celui-ci, ne peut être reproduit ou utilisé de quelque manière que ce soit sans l'autorisation écrite expresse du propriétaire.

Question :

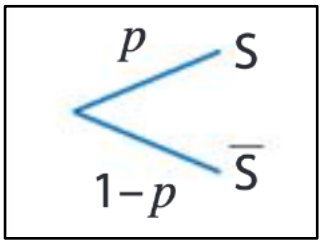
C'est quoi une loi binomiale ?

Votre modélisation est-elle fiable ?

Pouvez-vous nous en dire plus sur Bernoulli ?

Document support

On considère que la présence d'un passager est indépendante de celle des autres. Il s'agit donc d'une répétition d'épreuve identiques de Bernoulli à deux issues contraires notés succès et échecs.



On dit que : $X \rightsquigarrow B(n;p)$

Avec $\forall k \in [|0;n|]$, $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Avec les paramètres $n = 205$ et p= 0,035, on obtient :

$P(X=0) \approx 6{,}7 \times 10^{-4}$

$P(X=1) \approx 5 \times 10^{-3}$

$P(X=2) \approx 1{,}9 \times 10^{-2}$

$P(X=3) \approx 4{,}5 \times 10^{-2}$

$P(X=4) \approx 8{,}3 \times 10^{-2}$

$P(X=5) \approx 12{,}1 \times 10^{-2}$

On note D le dédommagement de la compagnie, alors l'univers pour D est donc :

$\Omega = \{0; -600; -1200; -1800; -2400; -3000\}$;

On a alors la loi de probabilité suivante pour la variable aléatoire D.

Surplus	0	1	2	3	4	5	
Dédommagement	0	-600	-1200	-1800	-2400	-3000	Total
Probabilité	0,847	0,083	0,045	0,019	0,005	0,00067	1

Ainsi $E(D) = -152{,}1$

Ainsi la compagnie gagne par vol $1000 - 152{,}1 = 848$ €

http://athena-magazine.be/magazine/le-magazine-n355/un-surbooking-calcule/