Comment les mathématiques vont permettre à la France de gagner la coupe du monde de rugby 2023 ?

Bonjour à tous,

Pour mon grand oral, vous avez choisi que je vous explique comment les mathématiques vont permettre à la France de gagner la coupe du monde de rugby 2023.

La première édition de la coupe du monde de rugby a eu lieu en 1987 en Nouvelle-Zélande. Elle a lieu tous les 4 ans à l'automne et en 2023, c'est chez nous que cela se passe. La France ne l'a jamais remporté, a atteint deux fois la finale, mais cette année, elle est pour nous.

Le 8 septembre, France Nouvelle Zélande en ouverture au stade de France. Un des enjeux pour la victoire est toujours la qualité du buteur. Lorsqu'une équipe marque un essai (aplatir le ballon dans l'en-but adverse), elle tente une transformation. Le buteur, pose le ballon sur un tee à la perpendiculaire de la ligne d'en-but dans le prolongement de l'endroit où l'essai a été marqué. Il doit faire passer le ballon entre les perches, distantes de 5,60 m. Il peut se placer aussi loin qu'il le désire jusqu'au milieu du terrain.

La question est simple : Ou doit-il se placer pour avoir la plus grande ouverture possible? Instinctivement on pourrait penser le plus loin possible, nous allons voir ensemble que ce n'est pas le cas.

Le terrain a une largeur maximale de 70 m. Je vous ai représenté les dimensions sur le document support. On a donc deux triangles rectangles notés AET et BET, E pour l'endroit où a été marqué l'essai et T pour l'endroit où va être tenté la transformation. x représente la distance à la ligne d'en-but. Il faut donc trouver la valeur de x pour que l'angle ATB soit maximal en notant d la distance entre le poteau et le point ou le ballon a été aplati.

On utilise alors une notion très simple : la trigonométrie
Dans AET, $tan(ETA) = \frac{d}{x}$
Dans BET, $tan(ETB) = \frac{d+5{,}6}{x}$
On doit donc trouver la valeur de $\alpha = ETB - ETA$
On a besoin d'une formule mathématique de trigonométrie : $tan(a-b) = \frac{tan(a)-tan(b)}{1+tan(a)tan(b)}$
Ainsi, $tan(\alpha) = tan(ETB - ETA) = \frac{tan(ETB)-tan(ETA)}{1+tan(ETB)tan(ETA)}$
Soit alors $tan(\alpha) = \frac{\frac{d+5{,}6}{x}-\frac{d}{x}}{1+\frac{d+5{,}6d}{x\ \ x}} = \frac{5{,}6x}{x^2+d(5{,}6+d)}$
d est un paramètre qui représente la longueur au poteau gauche.
On cherche donc à avoir la valeur maximale de α. Puisque la fonction tangente est croissante sur $[0; 90[$, cela revient à chercher une valeur maximale de $tan(\alpha)$ donc :
$f_d(x) = \frac{5{,}6x}{x^2+d(5{,}6+d)}$ avec $x \in [0{,}50]$ et $d \in [0; 32{,}20]$
On étudie les variations en dérivant $f'_d(x) = 5{,}6 \times \frac{-x^2+d(5{,}6+d)}{(x^2+d(5{,}6+d))^2}$
On peut construire le tableau de variation de f_d sur $[0{,}50]$
f_d atteint son maximum en $x_0 = \sqrt{d(5{,}6+d)}$
On calcule alors ce maximum $f_d\left(\sqrt{d(5{,}6+d)}\right) = \frac{5{,}6\sqrt{d(5{,}6+d)}}{2d(5{,}6+d)}$

A l'aide de la calculatrice en mode degré, on peut obtenir la valeur de l'angle maximal que voit le buteur au moment de sa tentative.

Valeur de d	$x_0 = \sqrt{d(5{,}6 + d)}$	$f_d(x_0)$	α
5 m	7,2	0,3846	21 °
10 m	12,49	0,2242	12, 6 °
15 m	17,58	0,1593	9 °
20 m	22,63	0,1237	7 °
25 m	27,66	0,1012	5,8°

Il est important de remarquer que dans le cas le moins favorable, essai marqué proche de la ligne de touche, le triangle ITE ou I est le milieu entre les poteaux est presque isocèle (27, 66 m contre 27,80 m) mais que la transformation a une longueur TI de 39 m.

Conclusion :

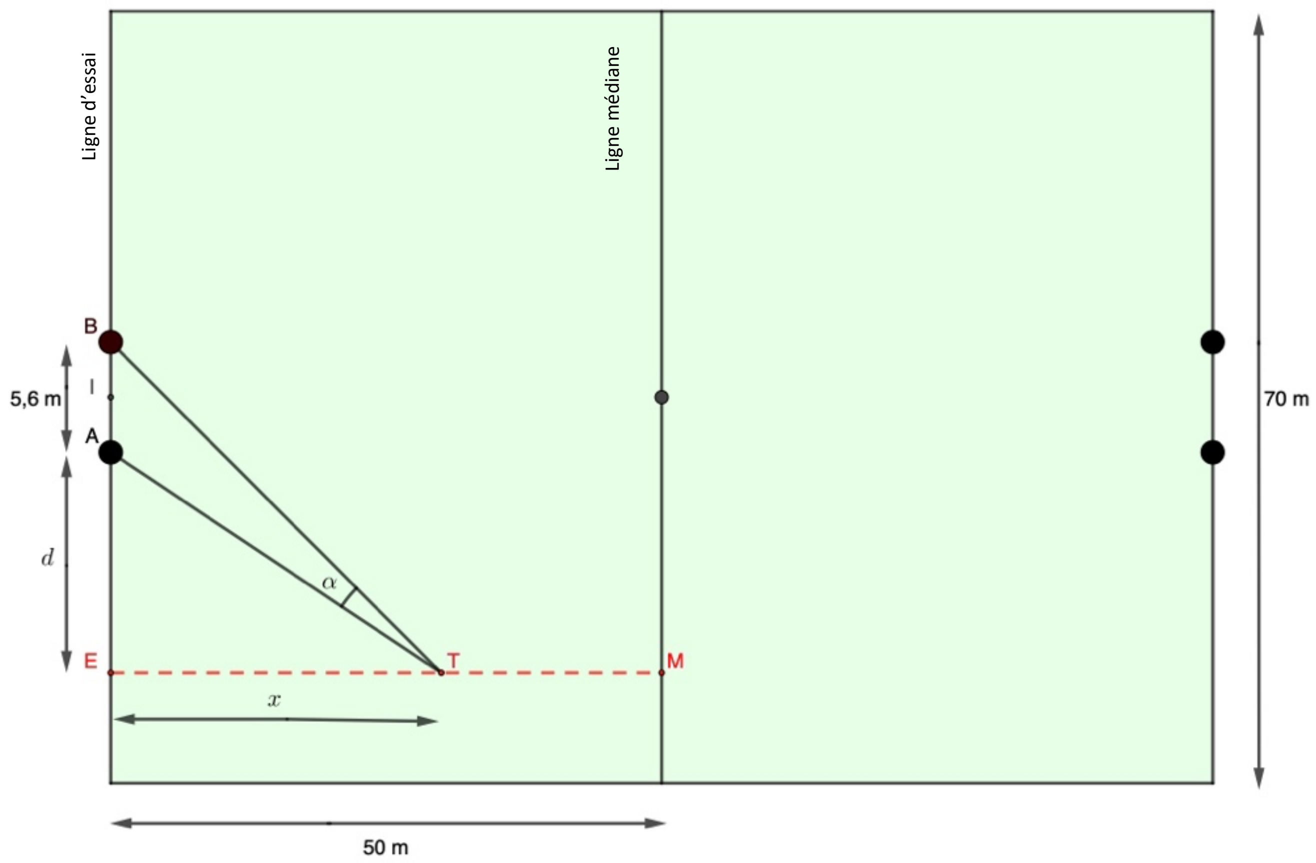
Grâce aux mathématiques et plus particulièrement à la trigonométrie, Thomas Ramos sait maintenant exactement où il doit placer son ballon pour avoir le plus de chance de réussir sa transformation.
Allez les bleus et rendez-vous le 28 octobre pour la finale !

Questions :

- Vous êtes allé un peu vite sur la formule de la tangente. Pouvez-vous nous expliquer cette formule ?
- Pourquoi la fonction tangente est croissante ?
- Pensez- vous que tous les points x_0 sont alignés ?
- Quel rapport avec votre projet ? (bénévole pour la CDM)

Comment les mathématiques vont permettre à la France de gagner la coupe du monde de rugby 2023.

Terrain vu de dessus



Premiers calculs

On a $d \in [0; 32{,}20]$, la distance entre le poteau gauche et l'endroit où l'essai a été marqué.
Dans AET, $tan\left(\widehat{ETA}\right) = \frac{d}{x}$. Dans BET, $tan\left(\widehat{ETB}\right) = \frac{d+5{,}6}{x}$

On doit donc trouver la valeur maximale de $\hat{\alpha} = \widehat{ETB} - \widehat{ETA}$ en fonction du paramètre d.

Formule de la tangente

Pour tout a et b dans $[0{,}90[$, on a : $tan(a - b) = \frac{tan(a) - tan(b)}{1 + tan(a)tan(b)}$

$tan(\hat{\alpha}) = tan\left(\widehat{ETB} - \widehat{ETA}\right) = \frac{tan(\widehat{ETB}) - tan(\widehat{ETA})}{1 + tan(\widehat{ETB})tan(\widehat{ETA})}$ soit $tan(\hat{\alpha}) = \frac{\frac{d+5{,}6}{x} - \frac{d}{x}}{1 + \frac{d+5{,}6}{x} \times \frac{d}{x}} = \frac{5{,}6x}{x^2 + d(5{,}6+d)}$

Étude de la fonction

$f_d(x) = \frac{5{,}6x}{x^2 + d(5{,}6+d)}$ avec $x \in]0{,}50]$ et $d \in [0; 32{,}20]$ et donc $f'_d(x) = 5{,}6\,\frac{-x^2 + d(5{,}6+d)}{(x^2 + d(5{,}6+d))^2}$

f_d atteint son maximum en $x_0 = \sqrt{d(5{,}6+d)}$ et il vaut $f_d\left(\sqrt{d(5{,}6+d)}\right) = \frac{5{,}6\sqrt{d(5{,}6+d)}}{2d(5{,}6+d)}$

Tableau des valeurs

Valeur de d	$x_0 = \sqrt{d(5{,}6+d)}$	$f_d(x_0)$	$\hat{\alpha}$
5 m	7,28	0,3846	21 °
10 m	12,49	0,2242	12, 6 °
15 m	17,58	0,1593	9,1 °
20 m	22,63	0,1237	7,1 °
25 m	27,66	0,1012	5,8°

Comment les mathématiques vont permettre à la France de gagner la coupe du monde de rugby 2023.

Pour tout a et b dans $[0,90[$, on a : $tan(a-b) = \frac{tan(a)-tan(b)}{1+tan(a)tan(b)}$

On a $\forall x [0; 90[, tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$
On l'applique alors avec $x = a - b$
Ainsi : $tan(a-b) = \frac{sin(a-b)}{cos(a-b)}$
Et donc : $tan(a-b) = \frac{sin(a)cos(b)-sin(b)cos(a)}{cos(a)cos(b)+sin(a)sin(b)}$
On factorise par $cos(a)cos(b)$ au numérateur et au dénominateur

$$tan(a-b) = \frac{cos(a)cos(b)}{cos(a)cos(b)} \times \frac{\frac{sin(a)}{cos(a)} - \frac{sin(b)}{cos(b)}}{1 + \frac{sin(a)}{cos(a)} \times \frac{sin(b)}{cos(b)}}$$

Pour tout a et b dans $[0,90[$, on a : $tan(a-b) = \frac{tan(a)-tan(b)}{1+tan(a)tan(b)}$

Comment les mathématiques vont permettre à la France de gagner la coupe du monde de rugby 2023.

f_d atteint son maximum en $x_0 = \sqrt{d(5{,}6 + d)}$

On a donc une relation entre x_0 et d.
On peut tracer la représentation graphique de cette fonction pour $d \in [0; 32{,}20]$,