# Probabilités conditionnelles et suites

## *Exercice 1 :*

Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre plusieurs cibles.
La probabilité que la première cible soit atteinte est de $\frac{1}{2}$

- Lorsqu'une cible est atteinte, la probabilité que la suivante le soit est de $\frac{3}{4}$.
- Lorsqu'une cible n'est pas atteinte, la probabilité que la suivante soit atteinte est de $\frac{1}{2}$

On note, pour tout entier naturel $n$ non nul :

- $A_n$ l'évènement : « la *n*ième cible est atteinte »
- $a_n$ la probabilité de l'évènement $A_n$.
- $b_n$ la probabilité de l'évènement $\overline{A_n}$.

1) a. Donner les valeurs de $a_1$ et $b_1$.
   b. Calculer $a_2$ et $b_2$. On pourra utiliser un arbre.
2) a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n$ puis que $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}$.
   b. On pose pour tout entier naturel non nul $n$ : $u_n = a_n - \frac{2}{3}$
   Montrer que $(u_n)$ est une suite géométrique. On précisera la raison et le premier terme.
   c. En déduire l'expression de $(u_n)$ puis celle de $(a_n)$en fonction de $n$.
   d. Déterminer alors la limite de la suite $(a_n)$
   e. Déterminer le plus petit entier $n$ tel que$a_n \geq 0{,}6665$

## *Exercice 2 :*

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, des archéologues procèdent à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.
Lorsque le *n*-ième sondage donne lieu à la découverte d'un vestige, il est dit positif.
L'évènement : « le *n*-ième sondage est positif » est noté $V_n$ et on note $P(V_n) = p_n$
L'expérience acquise au cours de ce type d'investigations permet de prévoir :

- Si un sondage est positif, le suivant à une probabilité égale à 0,6 d'être aussi positif.
- Si un sondage est négatif, le suivant à une probabilité égale à 0,9 d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire que $p_1 = 1$

1) Calculer la probabilité des évènements suivants :
   *A* : « Les 2ème et 3ème sondage sont positifs.
   *B* : « Les 2ème et 3ème sondage sont négatifs.
2) Calculer la probabilité $p_3$ pour que le 3ème sondage soit positif.
3) Après avoir construit un arbre pondéré au n-ième sondage, montrer que pour tout entier naturel non nul $n$, on a : $p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}1$.
4) On pose, pour tout entier naturel $n$ non nul, $u_n = p_n - 0{,}2$.
   Prouver que $(u_n)$ est une suite géométrique dont on précisera premier terme et raison.
5) Exprimer alors $u_n$ puis $p_n$en fonction de $n$.
6) En déduire la limite de $p_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.