



## Probabilités conditionnelles et suites

### Exercice 1 :

Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre plusieurs cibles.

La probabilité que la première cible soit atteinte est de  $\frac{1}{2}$

- Lorsqu'une cible est atteinte, la probabilité que la suivante le soit est de  $\frac{3}{4}$ .
- Lorsqu'une cible n'est pas atteinte, la probabilité que la suivante soit atteinte est de  $\frac{1}{2}$

On note, pour tout entier naturel  $n$  non nul :

- $A_n$  l'évènement : « la  $n$ ème cible est atteinte »
- $a_n$  la probabilité de l'évènement  $A_n$ .
- $b_n$  la probabilité de l'évènement  $\overline{A_n}$ .

1) a. Donner les valeurs de  $a_1$  et  $b_1$ .

b. Calculer  $a_2$  et  $b_2$ . On pourra utiliser un arbre.

2) a. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n$  puis que  $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}$ .

b. On pose pour tout entier naturel non nul  $n : u_n = a_n - \frac{1}{2}$

Montrer que  $(u_n)$  est une suite géométrique. On précisera la raison et le premier terme.

c. En déduire l'expression de  $(u_n)$  puis celle de  $(a_n)$  en fonction de  $n$ .

d. Déterminer alors la limite de la suite  $(a_n)$

e. Déterminer le plus petit entier  $n$  tel que  $a_n \geq 0,6665$

### Exercice 2 :

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, des archéologues procèdent à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.

Lorsque le  $n$ -ième sondage donne lieu à la découverte d'un vestige, il est dit positif.

L'évènement : « le  $n$ -ième sondage est positif » est noté  $V_n$  et on note  $P(V_n) = p_n$

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigations permet de prévoir :

- Si un sondage est positif, le suivant à une probabilité égale à 0,6 d'être aussi positif.
- Si un sondage est négatif, le suivant à une probabilité égale à 0,9 d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire que  $p_1 = 1$

1) Calculer la probabilité des évènements suivants :

$A$  : « Les 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> sondage sont positifs.

$B$  : « Les 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> sondage sont négatifs.

2) Calculer la probabilité  $p_3$  pour que le 3<sup>ème</sup> sondage soit positif.

3) Après avoir construit un arbre pondéré au  $n$ -ième sondage, montrer que pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a :  $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$ .

4) On pose, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_n = p_n - 0,2$ .

Prouver que  $(u_n)$  est une suite géométrique dont on précisera premier terme et raison.

5) Exprimer alors  $u_n$  puis  $p_n$  en fonction de  $n$ .

6) En déduire la limite de  $p_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .