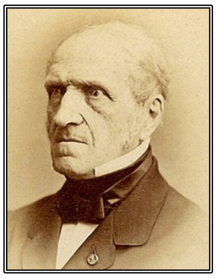
Vecteurs du plan

Capacités attendues en fin de chapitre :

- Représenter géométriquement des vecteurs.
- Construire géométriquement la somme de deux vecteurs.
- Coordonnées cartésiennes d'un vecteur, d'une somme de deux vecteurs.
- Caractériser l'alignement et le parallélisme par la colinéarité de deux vecteurs.
- Résoudre des problèmes en utilisant la représentation la plus adaptée des vecteurs.

Le mathématicien du chapitre :

Michel Chasles (1793-1880) est un mathématicien français. Son nom est associé à la relation de Chasles bien que cette propriété fût utilisée bien avant lui.
Il inventa aussi le terme d'homothétie qu'il prononçait homotéti.
Il fut aussi un historien des mathématiques en publiant en 1837 un Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie.



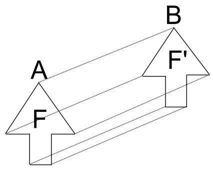
1) La translation

a) Approche expérimentale

Pour translater une figure F, on la fait glisser en suivant une ligne droite sans la faire tourner. On obtient une figure F', superposable à F.

On dit que la figure F' est l'image de la figure F par la translation qui transforme A en B.

On remarque que F est aussi l'image de F' par la translation qui transforme F' en F.
En faisant glisser la figure, on remarque qu'elle conserve la même forme et les mêmes dimensions.



Exemples :

Dans la vie courante, la translation nous entoure ; c'est le cas pour une voiture qui roule sur une autoroute ***en ligne droite*** ou un skieur qui dérape quand la pente est trop raide.
Sur l'image ci-contre, le travelling est une translation de la caméra ***à condition*** que le réalisateur n'imprime aucun mouvement rotatif à sa caméra.

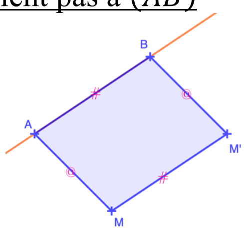
b) Image d'un point

Définition de la translation :

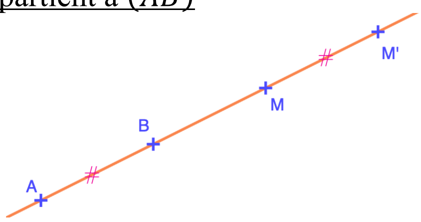
M' est l'image du point M par la translation qui transforme A en B signifie que $ABM'M$ est un parallélogramme.
On dit alors que M' est l'image du point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Illustrations :

M n'appartient pas à (AB)

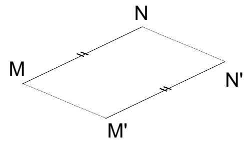


M appartient à (AB)



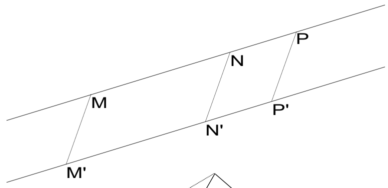
c) Propriétés de conservation des translations

- Une translation conserve ***les longueurs.***



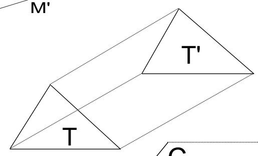
Si M'et N'sont les images de M et N par une translation.
Alors $MN = M'N'$.
En conséquence, une translation conserve les ***milieux.***

- Une translation conserve ***l'alignement*** des points.



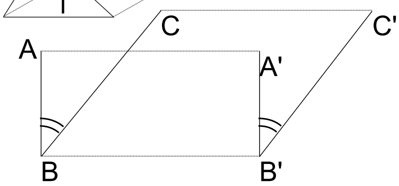
Si M, N et P sont alignés et M', N', P' sont les images de M, N, P par une translation.
Alors M', N', P' sont alignés

- Une translation conserve les ***formes***



Si T'est l'image de T par une translation quelconque, Alors T et T'ont la même forme.

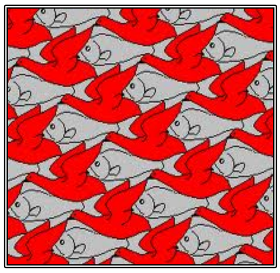
- Une translation conserve les ***angles***



Si $A'B'C'$ est l'image de l'angle ABC par une translation,
Alors ces deux angles ont la même mesure.

Remarque :

C'est en utilisant des translations qu'on peut constituer des pavages pour les sols, les murs ou même dans le domaine artistique (en fait on peut répéter autant qu'on le souhaite le même motif). C'est le cas des oiseaux (ou poissons) d'ESCHER, artiste néerlandais décédé en 1972.



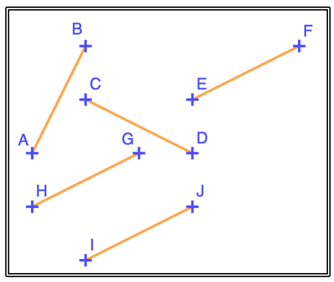
2) Vecteurs du plan

a) La distance entre deux points

Soient A et B deux points du plan. La distance entre les points A et B est la longueur du segment $[AB]$. On la note AB.
On utilise assez fréquemment le terme de ***norme*** pour parler de la longueur d'un vecteur

Remarque :

Les cinq segments ci-contre ont la même longueur.
Néanmoins, c'est la seule chose qu'ils ont en commun…
On peut écrire seulement : $AB = CD = EF = GH = IJ$. On ne peut donc pas les différencier sur ce seul critère.

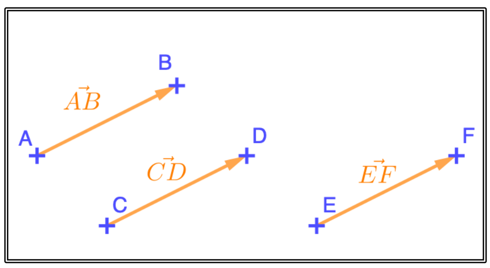


b) Définition d'un vecteur

Définition :

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un outil mathématique qui tient compte de la longueur du segment $[AB]$ mais aussi de la direction (AB) et du sens : de A vers B.
Ici, on peut écrire $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$ car ces trois vecteurs ont :

- La même longueur.
- Le même sens.
- La même direction.



Propriété :

Deux vecteurs sont égaux si et seulement s'ils ont la même norme, la même direction et le même sens.

Attention :

Très souvent, une confusion s'installe entre sens et direction. Prenons l'exemple du TGV, la ligne Montpellier Paris donne la direction du train. Vers Paris ou vers Montpellier indique son sens…

Cas particuliers :

• Le vecteur ***nul*** est noté $\vec{0}$: pour tout point M, $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$. Il n'a ni direction, ni sens et sa norme vaut 0.

• Le vecteur ***opposé*** à $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur qui a la même direction, la même norme que $\overrightarrow{AB}$ mais un sens contraire (ou opposé) C'est donc le vecteur $\overrightarrow{BA}$. On note alors : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

Remarque :

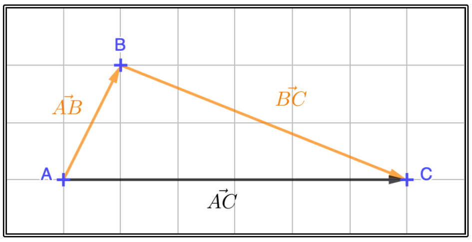
En définitive, un vecteur est un déplacement. En supposant que la terre soit plate, faire un déplacement de trois pas vers l'ouest à Moscou, San Francisco ou sur le Cours Gambetta revient à la même chose. C'est la notion de vecteur. C'est pourquoi on parle souvent d'un représentant d'un vecteur $\vec{u}$ et non pas du vecteur $\vec{u}$

c) ***Somme de deux vecteurs***

La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un vecteur noté $\vec{u} + \vec{v}$ qui représente le chemin constitué par les deux déplacements consécutifs correspondants à $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Dans la pratique, on « met les flèches bout à bout ».

Propriété :

L'égalité $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ est appelée la relation de Chasles



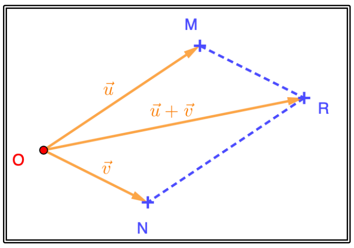
Traduction :

Dans la pratique, lorsqu'on ajoute des vecteurs, les seules choses qui comptent sont le point de départ et le point d'arrivée. En termes de vecteurs, pour rejoindre Paris au départ de Montpellier, passer par Lyon, Bordeaux ou Clermont revient à la même chose…

Caractérisation du parallélogramme :

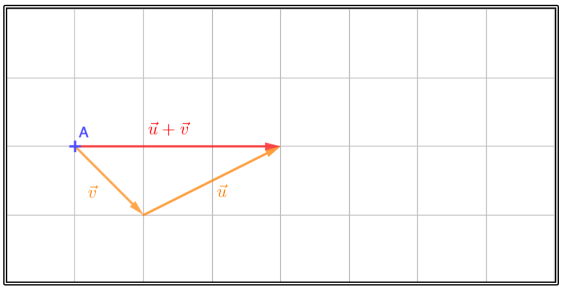
Si $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$, alors $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OR}$ où $OMRN$ est un parallélogramme.

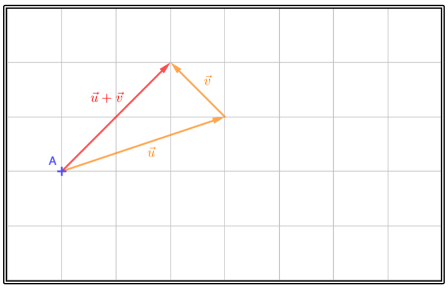
On en déduit la règle du parallélogramme : A, B et C étant donnés, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ équivaut à $ABDC$ est un parallélogramme

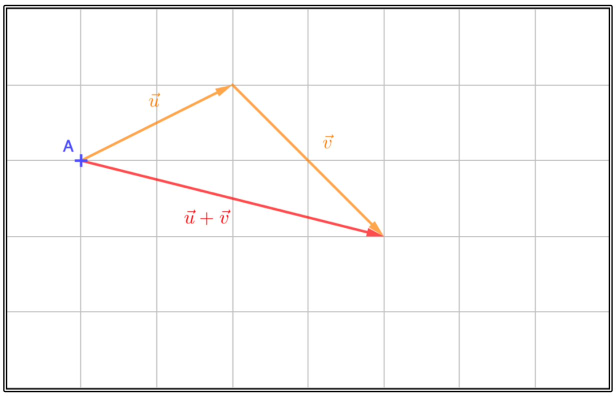


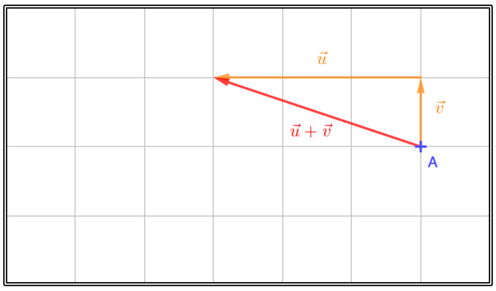
Exercice :

Dans chacun des cas, construire le vecteur d'origine A égal à la somme $\vec{u} + \vec{v}$









Remarques :

L'addition étant commutative, il est parfois plus malin de commencer par le deuxième vecteur afin de ne pas sortir du cadre.

d) Multiplication d'un vecteur par un réel

Propriété :

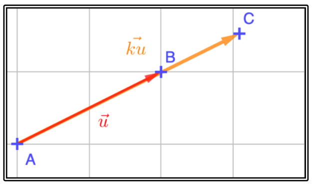
$\vec{u}$désigne un vecteur non nul et k un nombre réel non nul. Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k est le vecteur noté $k\vec{u}$ tel que :

• $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont la même direction :

Lorsque k > 0

• $k\vec{u}$ a le même sens que $\vec{u}$

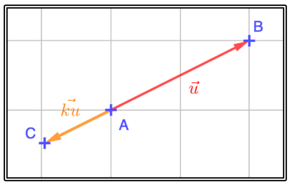
• La norme de $k\vec{u}$ est le produit de k par la norme de $\vec{u}$.



Lorsque k < 0

• $k\vec{u}$ est de sens opposé à celui de $\vec{u}$

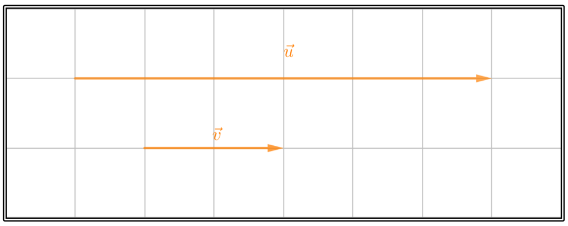
• La norme de $k\vec{u}$ est le produit de l'opposé de k par la norme de $\vec{u}$.



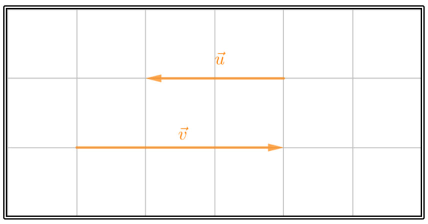
Exercice :

Compléter les relations entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du tableau ci-dessous grâce aux illustrations correspondantes :

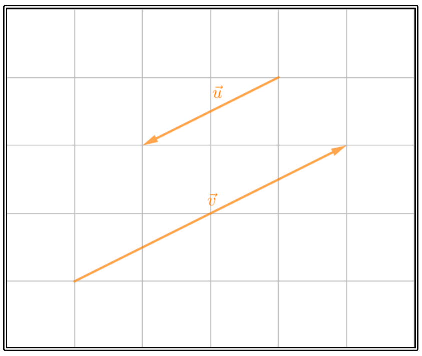
$\vec{u} = 3\vec{v}$ ou $\vec{v} = \frac{1}{3}\vec{u}$



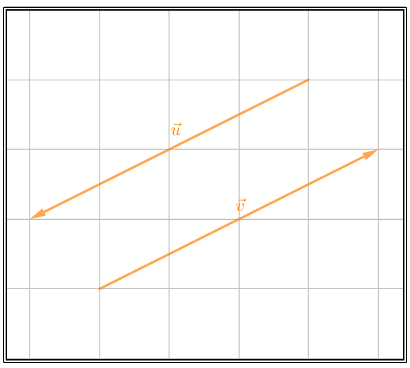
$\vec{u} = \frac{-2}{3}\vec{v}$ ou $\vec{v} = \frac{-3}{2}\vec{u}$



$\vec{u} = \frac{-1}{2}\vec{v}$ ou $\vec{v} = -2\vec{u}$



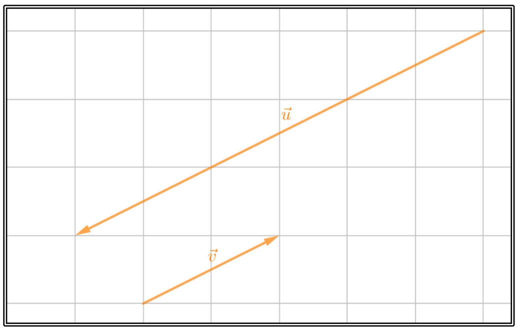
$\vec{v} = -\vec{u}$ ou $\vec{u} = -\vec{v}$

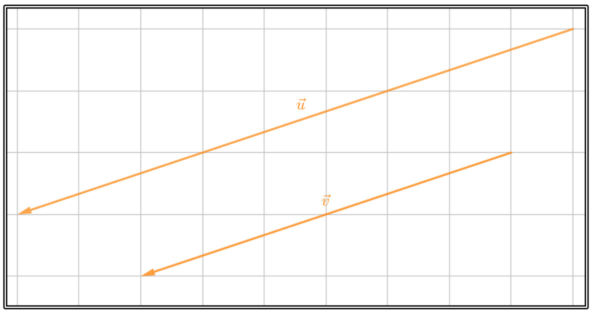


Exercice :

Compléter les illustrations ci-dessous en tenant compte des relations entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$\vec{u} = -3\vec{v}$ $\qquad\qquad$ $\vec{v} = \dfrac{2}{3}\vec{u}$





3) *Géométrie analytique*

a) *Repérage dans le plan*

Définition :

Un repère du plan est constitué d'un point O appelé origine du repère et de deux vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ non colinéaires. Il se note alors $(O; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath})$

Remarque :

Un repère $(O; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath})$ peut être noté $(O; I\,; J)$ où I et J sont les points tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{\jmath}$

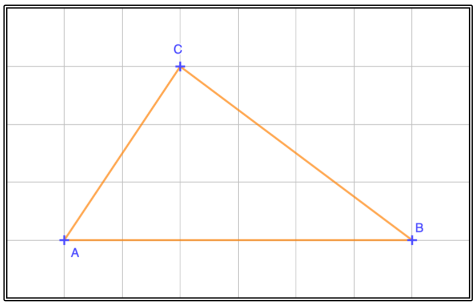
Exemple :

On donne trois points A, B et C non alignés.
Donner les coordonnées des points dans chaque repère.

$(A; \overrightarrow{AB}\,; \overrightarrow{AC})A(0,0)\ B(1,0)$ et $C(0,1)$

$(C; \overrightarrow{CB}\,; \overrightarrow{AC})A(0,-1)\ B(1,0)$ et $C(0,0)$

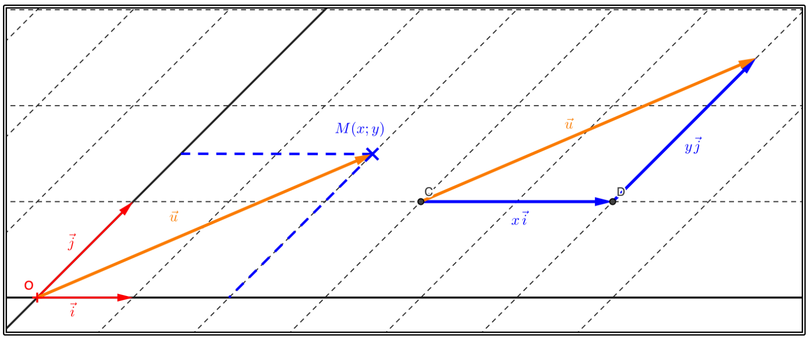
$(B; \overrightarrow{AB}\,; \overrightarrow{BC})\ A(-1,0)\ \ B(0,0)$ et $C(0,1)$



b) *Coordonnées de vecteur*

Dans ce paragraphe, un repère $(O; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath})$du plan est fixé. $\vec{u}$ est un vecteur donné et M est le point tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$

Notons $(x; y)$les coordonnées du point M, alors. $\vec{u} = \overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$



Définition :

Le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées le couple $(x; y)$dans le repère$(O; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath})$.

Cela signifie que $\vec{u} = \overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.En géométrie analytique, le vecteur se note, $\vec{u}(x; y)$

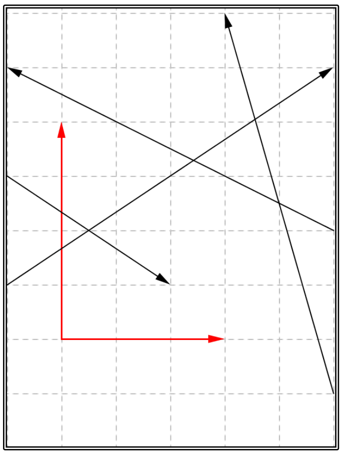
Remarque :

On peut aussi noter le vecteur sous la forme d'un vecteur colonne $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

<u>Exercice :</u>

Tracer un représentant de chacun des vecteurs suivants :

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\vec{w}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{7}{4}\end{pmatrix}$ $\vec{l}\begin{pmatrix}-2\\\frac{3}{4}\end{pmatrix}$



<u>Propriété :</u>
a) Les vecteurs $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$sont égaux si et seulement si leurs coordonnées respectives sont égales
b) Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\vec{u}+\vec{v}(x+x';y+y')$
c) Le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $k\vec{u}(kx;ky)$où k est un réel quelconque.

<u>Propriété :</u>

Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points du plan.
Alors, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A)$

<u>Remarques :</u>

- Il n'y a de $=$ entre le vecteur et le couple de coordonnées.
- On retient la formule grâce à « extrémité moins origine »

<u>Exercice :</u>
On donne le point $A(-1;2)$et le vecteur $\vec{u}(3;-1)$. La translation de vecteur $\vec{u}$ transforme A en B. Calculer les coordonnées de B.

<u>Solution :</u>
On calcule d'abord les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A)$ soit $\overrightarrow{AB}(x+1;y-2)$.
On doit donc résoudre le système $\begin{cases}x+1=3\\y-2=-1\end{cases}$. On obtient alors : $B(2;1)$

<u>Exercice :</u>

Écrire en langage python un code permettant de calculer les coordonnées d'un vecteur défini par deux points du plan.

Algorithme

Coordonnées d'un vecteur.
<u>Déclaration des variables</u>
X, Y, U, V, P, Q: réels
<u>Traitement</u>
Lire X, Y, U, V
Affecter à P la valeur U - X
Q ← V - Y
<u>Sortie</u>
Afficher P et Q

Programme Python

```
from math import *

def coordonnees(x_A,y_A,x_B,y_B):
    x = x_B - x_A
    y = y_B - y_A
    return(x,y)
```

c) Colinéarité de vecteur

Définition :

Dire que les vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut à dire qu'il existe un nombre réel k non nul tel que : $\vec{v} = k\vec{u}$

Remarque :

Le vecteur nul est colinéaire à tout autre vecteur du plan.

Exemple :

Parmi les vecteurs suivants, quels sont les couples de vecteurs colinéaires ?

$\vec{u}(3; 5)$; $\vec{v}(12; -15)$; $\vec{w}(-6; -10)$; $\vec{t}(-4; 5)$; $\vec{l}(-4{,}5; 7{,}5)$

Solution :

$\vec{w} = -2\,\vec{u}$ puis $\vec{v} = -3\,\vec{t}$ Les calculs sont faciles lorsque les nombres sont petits mais comment faire lorsque les valeurs augmentent ?

Propriété :

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Les points distincts A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Remarque :

La colinéarité est une autre manière de prouver l'alignement de points dans un repère.

Propriété : Condition de colinéarité de deux vecteurs

Les vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$

Le nombre $xy' - x'y = 0$ est le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Notation :

On écrit :$det(\vec{u}\,, \vec{v}\,) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$

Exemple :

On donne les vecteurs $\vec{u}(5; 4)$; $\vec{v}(9{,}5; 7{,}5)$; Étudier leur colinéarité.

$\begin{vmatrix} 5 & 9{,}5 \\ 4 & 7{,}5 \end{vmatrix} = 5 \times 7{,}5 - 9{,}5 \times 4.$ On a donc $det(\vec{u}\,, \vec{v}\,) = -0{,}5$

Les deux vecteurs ne sont donc pas colinéaires.

Algorithmique :

Écrire un programme en langage Python qui teste la colinéarité de deux vecteurs.

Algorithme

Déclaration des variables

X, Y, S, T, c : réels

Traitement

Lire X, Y, S, T
Affecter à c la valeur $X \times T - Y \times S$
Si $c = 0$ alors
  Afficher (« Les vecteurs sont colinéaires. »)
Sinon
  Afficher (« Les vecteurs non colinéaires. »)
Fin si

Programme Python

```
from fractions import Fraction

def colineaires(x_u,y_u,x_v,y_v):
  c=x_u*y_v-x_v*y_u
  if c==0:
    resultat = "les vecteurs sont colinéaires"
  else:
    resultat = "les vecteurs ne sont pas colinéaires"
  return resultat
```

Remarque :

Attention, si les coordonnées entrées sont des fractions, il faut utiliser le module Fraction de Python pour tester l'égalité.

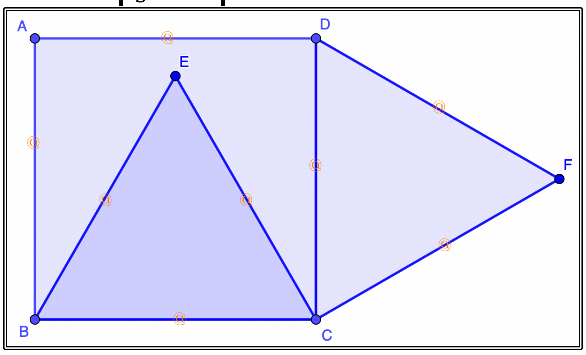
Exercice 1 :

1. Les vecteurs $\vec{u}\left(\frac{1}{3};\frac{-1}{2}\right)$ et $\vec{v}\left(\frac{2}{5};\frac{-3}{5}\right)$ sont-ils colinéaires ? $\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{5} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-3}{5} \end{vmatrix} = 0$; Oui

2. Les vecteurs $\vec{u}\left(\frac{-2}{15};\frac{2}{5}\right)$ et $\vec{v}\left(\frac{-4}{3};5\right)$ sont-ils colinéaires ? $\begin{vmatrix} \frac{-2}{15} & \frac{-4}{3} \\ \frac{2}{5} & 5 \end{vmatrix} = \frac{-2}{15}$; Non

Exercice 2 :

Soit la configuration ci-contre. On veut montrer que les points A, E et F sont alignés.



Soit un triangle équilatéral de côté a. Montrer que la hauteur du triangle mesure $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

On choisit le repère orthonormal $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

1. Donner alors les coordonnées des points A, B, C et D dans ce repère
2. Expliquer pourquoi les coordonnées des points E et F sont : $E\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $F\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$
3. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ puis conclure.

Solution :

1. On lit dans le repère les coordonnées suivantes : $B(0;0)$ $C(1;0)$ $A(0;1)$ $D(1;1)$
2. On nomme H le projeté orthogonal de E sur $[CB]$Dans le triangle BEH, on utilise le théorème de Pythagore. On obtient que la longueur $EH = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Donc $E\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

   Par symétrie, on nomme J le milieu de $[CD]$ et on obtient $JF = \frac{\sqrt{3}}{2}$ soit $F\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$
3. $\overrightarrow{AE}\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}-2}{2}\right)$ et $\overrightarrow{AF}\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2};\frac{-1}{2}\right)$

   On évalue alors $det(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}+2}{2} \\ \frac{\sqrt{3}-2}{2} & \frac{-1}{2} \end{vmatrix}$

   $det(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}) = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}-2}{2} \times \frac{\sqrt{3}+2}{2}$

   $det(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}) = \frac{-1}{4} - \frac{3-4}{4}$

   $det(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}) = 0$. Ainsi $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires.

   Les droites (AE) et (AF) sont parallèles avec un point en commun.

   Les points A, E et F sont donc alignés