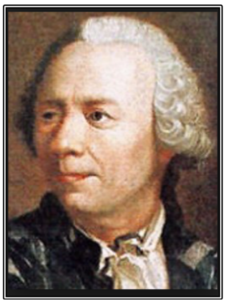
Variations et extrema, optimisation

Capacités attendues en fin de chapitre :

- Relier représentation graphique et tableau de variation.
- Déterminer graphiquement les extremums d'une fonction.
- Exploiter un logiciel de géométrie dynamique pour décrire les variations d'une fonction donnée par une formule.

Le mathématicien du chapitre :

Leonhard Euler (1707-1783) est un mathématicien suisse qui passa une grande partie de sa vie dans l'empire russe.
Il introduisit une grande partie de la terminologie et de la notation des mathématiques modernes.
C'est en 1734 qu'il écrit la première fois la notation $f(x)$. Il est considéré comme l'un des mathématiciens les plus prolifiques de l'histoire. Autre mathématicien, Pierre Simon de Laplace déclara : « Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maitre à tous »

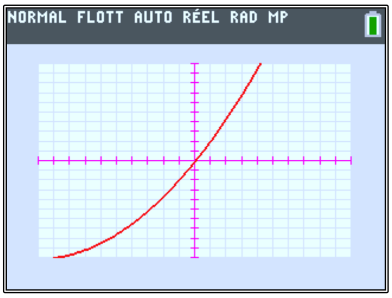


1) Sens de variation d'une fonction

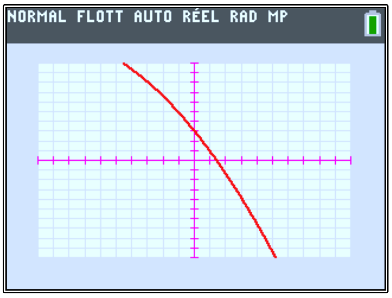
a) Fonction croissante, décroissante sur un intervalle

f est une fonction définie sur un intervalle I.

Dire que f est ***croissante*** sur I signifie que pour tous réels a et b de I :
Si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$
On dit que f conserve *l'ordre*



Dire que f est ***décroissante*** sur I signifie que pour tous réels a et b de I :
Si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$
On dit que f change *l'ordre*



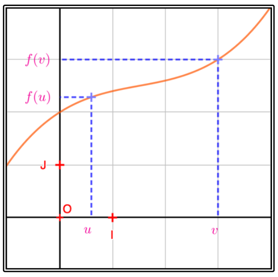
Remarques :

- Ça n'a aucun sens de dire qu'une fonction est croissante sans préciser l'intervalle sur lequel sont étudiées les variations.
- Une fonction n'est pas forcément monotone. Elle peut être croissante sur un intervalle puis être décroissante sur un autre intervalle.
- On va dorénavant apprendre à déterminer les variations d'une fonction, non pas par observation mais par le calcul.

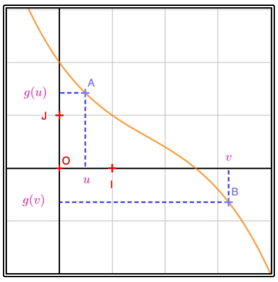
Exemples :

On donne sur la page suivante les courbes C_1 et C_2 qui représentent respectivement des fonctions f et g définies sur $[-1; 4]$

- D'après l'allure de la courbe C_1, pour tous réels u et v de $[-1; 4]$
Si $u < v$ alors $f(u) < f(v)$ alors f est croissante sur $[-1; 4]$
(Elle est même strictement croissante sur $[-1; 4]$)
On dit que les antécédents et les images sont rangés dans le même ordre.



- D'après l'allure de la courbe C_2, pour tous réels u et v de $[-1; 4]$,
Si $u < v$ alors $g(u) > g(v)$ alors g est décroissante sur $[-1; 4]$
(Elle est même strictement décroissante sur $[-1; 4]$)
On dit que les antécédents et les images ne sont pas rangés dans le même ordre.



b) Déterminer les variations d'une fonction par le calcul

Exemple 1 :

Soit la fonction du second degré $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$ définie sur $I =]2; +\infty[$
Montrer qu'elle est croissante sur $I =]2; +\infty[$

Solution :

Soient a et b deux nombres de I tels que $2 < a < b$
On va évaluer la différence $f(b) - f(a) = 2b^2 - 8b + 5 - (2a^2 - 8a + 5)$
Soit en simplifiant $f(b) - f(a) = 2b^2 - 8b - (2a^2 - 8a)$
Soit en simplifiant $f(b) - f(a) = 2(b^2 - a^2 + 4a - 4b)$
On factorise alors l'expression : $f(b) - f(a) = 2[(b + a)(b - a) - 4(b - a)]$
On a alors $f(b) - f(a) = 2(b - a)[b + a - 4]$
Chacun des 2 facteurs garde un signe constant positif sur $I =]2\,; \infty]$
On a donc $f(a) < f(b)$ et f est croissante sur $I =]2\,; \infty]$

Exemple 2 :

Soit la fonction homographique $f(x) = \frac{2}{x-3} + 7$ définie sur $I =]-\infty\,; 3[$. Montrer qu'elle est décroissante sur $I =]-\infty\,; 3[$

Solution :

Soient a et b deux nombres de I tels que $a < b < 3$
On va évaluer la différence $f(b) - f(a) = \frac{2}{b-3} + 7 - \left(\frac{2}{a-3} + 7\right)$
Soit en simplifiant $f(b) - f(a) = \frac{2}{b-3} - \frac{2}{a-3}$
On réduit au même dénominateur $f(b) - f(a) = \frac{2(a-b)}{(b-3)(a-3)}$
Chacun des 3 facteurs garde un signe constant négatif sur $I =]-\infty\,; 3[$
On a donc $f(b) - f(a) < 0$ et donc $f(b) < f(a)$
Ainsi f est décroissante sur $I =]-\infty\,; 3[$

c) Tableau de variation d'une fonction

Le tableau de variation d'une fonction résume les variations de la fonction sur l'intervalle choisi. Il y a deux lignes qui le composent :

- La première indique le domaine de définition ainsi que les valeurs en lesquelles la fonction change ses variations.
- La deuxième ligne indique par des flèches le sens de variation de la fonction en fonction de l'intervalle. On place au départ et au bout des flèches les images en prenant soin d'indiquer lorsque cela est possible les valeurs exactes.

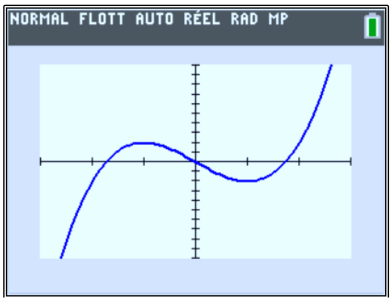
Remarque :

En classe de seconde, on ne construit le tableau de variation d'une fonction que par observation de la courbe. En classe de première, ce sont des calculs qui conduiront au tableau de variation.

Exemple :

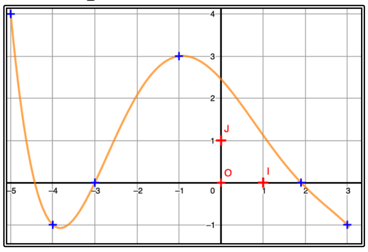
On donne la courbe suivante définie sur ℝ. On ne peut pas mettre les images au voisinage de l'infini mais on peut construire quand même le tableau de variation de *f* sur ℝ. On n'écrit pas $f(x)$ mais *f* dans le tableau car $f(x)$ est une image qui n'a pas vocation à bouger.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
variations de f		↗	2	↘	-2	↗	



d) Étude du sens de variation d'une fonction par lecture graphique

• Fonction *f* est définie sur $[-5; 3]$ par sa courbe :



• Sens de variation de *f* :

La fonction *f* est :
- décroissante sur $[-5; -4]$
- croissante sur $[-4; -1]$
- décroissante sur $[-1; 3]$

• Tableau de variation de *f*
On résume ainsi les informations obtenues ci-contre :

x	-5		-4		-1		3
f	4	↘	-1	↗	3	↘	-1

3) Maximum et minimum d'une fonction

f est une fonction, *I* un intervalle inclus dans son ensemble de définition et *a* un réel de *I*.

• Dire que $f(a)$ est le minimum de *f* sur *I* signifie que $f(a)$ est la plus petite valeur de la fonction :
En d'autres termes, pour tout réel *x* de *I*, $f(x) \geq f(a)$

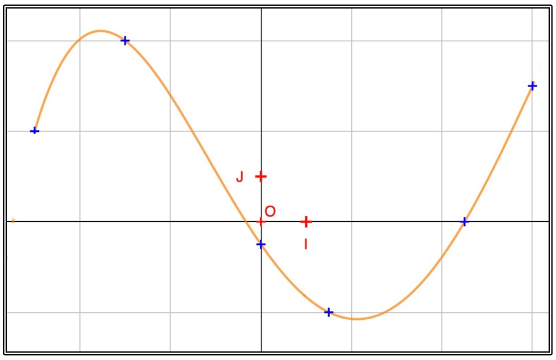
• Dire que $f(a)$ est le maximum de *f* sur *I* signifie que $f(a)$est la plus grande valeur de la fonction :
En d'autres termes pour tout réel *x* de *I*, $f(x) \leq f(a)$

Attention :

Ne pas confondre le minimum (respectivement le maximum) de la fonction avec l'abscisse du point ou ce minimum (respectivement le maximum) est atteint.

Exemple :

La fonction ci-contre est définie sur $[-5; 6]$.
Sur $[-5; 6]$, son maximum est atteint en $-3{,}5$ et vaut $4,4$.
Sur $[-5; 6]$, son minimum est atteint en 2 et vaut $-2{,}2$.
Sur $[0; 6]$, son maximum vaut 3 et est atteint en 6.



Remarque :

On utilise parfois le vocabulaire d'extremum local et d'extremum global si la fonction présente plusieurs extremums. Il faut donc bien préciser l'intervalle sur lequel la valeur est un extremum.

3) *Comparer des images à l'aide d'un tableau de variation*

Le tableau de variation permet (parfois) de comparer des images. Attention aux pièges…

On donne le tableau de variation de *f* ci-dessous. Comparer les images.

x	0		2		3,5		12
f	-1	↗	4	↘	1	↗	8

Comparer les nombres suivants lorsque cela est possible.

- $f(1) < f(1{,}5)$
- $f(0) < f(3{,}5)$
- $f(2{,}5) > f(3)$
- $f(1)\ ONPPR\ f(5)$

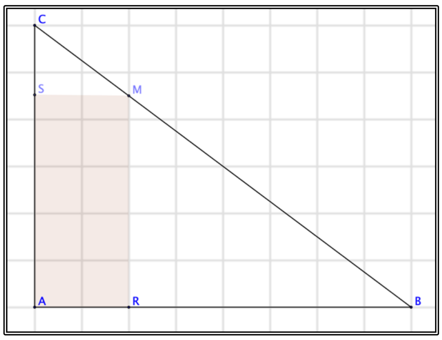
Remarque :

On peut toujours comparer deux images sur un intervalle sur lequel la fonction est monotone.

4) *Problème d'optimisation*

On considère le triangle ABC ci-contre, rectangle en A, tel que $AB = 8$ et $AC = 6$. Pour tout point M, mobile sur le segment $[BC]$, on construit le rectangle $ARMS$.
On pose $x = AR$. On considère la fonction qui à x, associe l'aire du rectangle $ARMS$

Déterminer la position de M afin que *f* soit maximale.



Solution :

Puisque x représente une longueur, on a alors : $0 \leq x \leq 8$ puisque M se déplace sur $[BC]$
Pour déterminer l'aire du rectangle, on doit déterminer la longueur MR. On utilise alors le théorème de Thalès puisque la figure est un rectangle.
On a alors : $\frac{BR}{BA} = \frac{BM}{BC} = \frac{MR}{AC}$ soit en remplaçant $\frac{8-x}{8} = \frac{MR}{6}$
En isolant, on obtient : $MR = \frac{6(8-x)}{8}$ donc on a : $MR = -\frac{3}{4}x + 6$
L'aire du rectangle $ARMS$ est donc donné par : $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 6x$
On doit donc étudier les variations de la fonction afin de déterminer la position qui la rend maximale. On conjecture à l'aide de la calculatrice la position en traçant la représentation graphique de f après avoir adaptée la fenêtre au domaine de définition.
C'est donc pour $x = 4$ que l'aire du rectangle est maximale. Elle vaut alors 12.