Variable aléatoire

Compétences attendues en fin de chapitre :

- Interpréter en situation et utiliser les notations $\{X = a\}$, $\{X \leq a\}$ $P(X = a), P(X \leq a)$
- Passer du registre de la langue naturelle au registre symbolique et inversement.
- Modéliser une situation à l'aide d'une variable aléatoire
- Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire.
- Calculer une espérance, une variance, un écart-type.
- Utiliser la notion d'espérance pour résoudre un problème (jeu équitable)

Le mathématicien du chapitre :

Christian Huygens (1629-1685) est un mathématicien néerlandais. Il publie en 1657 le premier livre sur calcul de probabilité dans les jeux de hasard. Ce n'est cependant qu'en 1930 que la description actuelle, en termes d'univers, s'est imposée. Au *XVII*ème siècle, de nombreux autres mathématiciens (Pascal, Moivre, Bernoulli, Euler) ont apporté leur contribution aux probabilités.

1) Activités introductives

a) Le stylo 4 couleurs

Marina organise un jeu avec son stylo 4 couleurs (bleu, noir, rouge et vert). Le joueur appuie au hasard sur une des 4 couleurs les yeux fermés. Si elle est verte, le joueur gagne 10 bonbons, si elle est rouge ou bleue, le joueur gagne 2 bonbons, sinon elle ne gagne rien.

1) Quelles sont les issues possibles de cette expérience ?
   Il y a 4 issues possibles qui sont les couleurs du stylo.
2) Quels sont les gains possibles ?
   On peut gagner 10 bonbons, 2 bonbons ou aucun bonbon.
3) Compléter le tableau suivant, modèle de probabilité adapté à cette expérience.

Issues	Rouge	Bleu	Vert	Noir	Total
Probabilités	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

4) Le gain est une variable aléatoire car elle peut prendre différentes valeurs liées au hasard. Compléter le tableau ci-dessous.

Gains	10	2	0	Total
Probabilités	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

Ce tableau représente la loi de probabilité. On remarque que toutes les issues n'ont pas la même chance d'être réalisées. On dit qu'on n'est pas en situation d'équiprobabilité.

b) Avec un jeu de 32 cartes

Dans un jeu de 32 cartes, on tire successivement et avec remise deux cartes. Le jeu suit les règles suivantes. On gagne :

- 30 euros si on tire deux figures.
- 25 euros si on tire une figure et une autre carte.
- La somme des points en euros indiqués sur les cartes obtenues si on ne tire pas de figure

On souhaite déterminer le nombre de points possibles en fonction de chaque situation. Pour cela, on complète le tableau à double entrée suivant, regroupant toutes les issues possibles.

	AS	ROI	DAME	VALET	10	9	8	7
AS	2	25	25	25	11	10	9	8
ROI	25	30	30	30	25	25	25	25
DAME	25	30	30	30	25	25	25	25
VALET	25	30	30	30	25	25	25	25
10	11	25	25	25	20	19	18	17
9	10	25	25	25	19	18	17	16
8	9	25	25	25	18	17	16	15
7	8	25	25	25	17	16	15	14

1) Lister l'ensemble des issues possibles. $\Omega = \{30,25,20,19,18,17,16,15,14,11,10,9,8,2\}$

2) Quelle est l'issue la plus représentée ?

Obtenir une figure et une autre carte est la plus représentée avec une probabilité de $\frac{30}{64}$

3) Quelle est la probabilité d'obtenir deux figures ? La probabilité est de $\frac{9}{64}$.

Compléter le tableau ci-dessous regroupant toutes les issues de ce jeu avec leur probabilité respective. Un tel tableau est appelé ***loi de probabilité.***

Gain	2	8	9	10	11	14	15	16	17	18	19	20	25	30	TOTAL
Proba	$\frac{1}{64}$	$\frac{2}{64}$	$\frac{2}{64}$	$\frac{2}{64}$	$\frac{2}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{2}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{4}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{2}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{30}{64}$	$\frac{9}{64}$	1

2) Loi de Probabilité

a) Vocabulaire

Expérience aléatoire :

Une expérience aléatoire est une expérience dont on connait à l'avance toutes les issues possibles, sans savoir à l'avance laquelle va être réalisée.

L'univers :

L'univers associé à cette expérience est l'ensemble des issues de cette expérience.

Remarque :

Une loi de probabilité P sur un univers Ω est dite ***discrète*** lorsque l'univers est fini.

Exemple **:**

On lance deux fois de suite un dé à six faces, numérotées de 1 à 6, bien équilibré.
L'univers est l'ensemble des couples $(i; j)$où i et j sont des entiers avec : et$1 \leq i \leq 6$ et $1 \leq j \leq 6$. On peut alors représenter cet univers en utilisant un tableau :

On appelle évènement tout sous-ensemble ou partie de l'univers. On construit alors un tableau croisé.

	1	2	3	4	5	6
1	$(1;1)$	$(1;2)$	$(1;3)$	$(1;4)$	$(1;5)$	$(1;6)$
2	$(2;1)$	$(2;2)$	$(2;3)$	$(2;4)$	$(2;5)$	$(2;6)$
3	$(3;1)$	$(3;2)$	$(3;3)$	$(3;4)$	$(3;5)$	$(3;6)$
4	$(4;1)$	$(4;2)$	$(4;3)$	$(4;4)$	$(4;5)$	$(4;6)$
5	$(5;1)$	$(5;2)$	$(5;3)$	$(5;4)$	$(5;5)$	$(5;6)$
6	$(6;1)$	$(6;2)$	$(6;3)$	$(6;4)$	$(6;5)$	$(6;6)$

$A = \{(1 ; 1), (2 ; 2), (3 ; 3), (4 ; 4), (5 ; 5), (6 ; 6)\}$ est l'événement :« obtenir un couple identique ».
B est l'événement : « obtenir deux chiffres consécutifs rangés dans l'ordre croissant »
$B = \{(1 ; 2), (2 ; 3), (3 ; 4), (4 ; 5), (5 ; 6)\}$

On dit qu'un événement E est ***réalisé*** lorsque le résultat de l'expérience est un élément de E.
Par exemple, l'événement A est réalisé si les deux lancers successifs du dé donnent un double.

$C = \{(1 ; 6), (6 ; 1), (2 ; 6), (6 ; 2), (3 ; 6), (6 ; 3), (4 ; 6), (6 ; 4), (5 ; 6), (6 ; 5), (6 ; 6)\}$ est l'événement :« obtenir au moins un 6 ».
On note D, l'événement *:* « la somme des numéros obtenus est supérieure à 7 ».
Alors, $D = \{(2 ; 6), (6 ; 2), (3 ; 5), (5 ; 3), (4 ; 4), \ldots\}$

Événement élémentaire :

On appelle événement élémentaire tout sous-ensemble de l'univers à ***une seule issue***.
Les événements élémentaires associés à cette expérience sont :
$\{(1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6), (2; 1),\ldots\ldots\ldots\ldots,(6; 4), (6; 5), (6; 6)\}$.

b) Loi de probabilité

Avec l'exemple précédent, si le dé est parfaitement équilibré, toutes les issues de l'expérience ont la même « chance d'apparition ».
La probabilité d'obtenir une issue quelconque $(i; j)$vaut $\frac{1}{36}$. On note $P\{(i; j)\} = \frac{1}{36}$

Définition :

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\ldots, \omega_n\}$ l'univers des éventualités associées à une expérience aléatoire
Définir une ***loi de probabilité*** P sur l'univers Ω (fini), c'est associer à chaque issue ω_i de l'expérience un réel positif p_i de telle sorte que :

(1) $\sum_{i=1}^{i=n} p_i = 1$

(2) Pour tout événement A, $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$

(La somme des probabilités élémentaires des issues appartenant à A)

Pour l'exemple introductif (lancés successifs d'un dé), la probabilité d'un événement quelconque E est obtenu par : $P(E) = \sum_{(i;j) \in E} P\{(i;j)\}$

Ainsi, en notant p_{ij} la probabilité d'obtenir le couple $(i;j)$, on obtient :

$P(A) = \sum_{i=j} p_{ij}$ soit alors $P(A) = \frac{1}{36} \times 6$ donc $P(A) = \frac{1}{6}$

$P(B) = \sum_{i<j} p_{ij}$ soit alors $P(B) = \frac{1}{36} \times 5$ donc $P(B) = \frac{5}{36}$

On note $\bar{D}$ l'événement **contraire** de D.
$\bar{D}$ est l'événement : « obtenir une somme inférieure ou égale à 7».

$P(\bar{D}) = \sum_{i+j \leq 7} p_{ij}$ soit alors $P(\bar{D}) = \frac{1}{36} \times 21$ donc $P(\bar{D}) = \frac{21}{36}$

$P(D) = \sum_{i+j > 7} p_{ij}$ soit alors $P(D) = \frac{1}{36} \times 15$ donc $P(D) = \frac{15}{36}$

Heureusement, on remarque que : $P(\bar{D}) + P(D) = 1$

• Événement ***« A et D »*** :

Cet événement est noté : $A \cap D = \{(4;4), (5;5), (6;6)\}$ soit alors $P(A \cap D) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

• Événement ***« A ou C »*** :
Cet événement est noté $A \cup C$: « obtenir un couple ou au moins un 6 ».
On utilise la formule de Poincaré, vue en seconde.

$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$ soit $P(A \cup C) = \frac{1}{6} + \frac{11}{36} - \frac{1}{36}$ d'où $P(A \cup C) = \frac{4}{9}$

• L'univers Ω est l'événement ***certain*** : $P(\Omega) = \sum_{(i\,;\,j)\in\Omega} p_{ij} = 1$

• L'événement « A et B » est, dans cet exemple l'ensemble vide. Il est noté $\varnothing$. On a: $P(\varnothing) = 0$

Cas particulier : la loi uniforme

Lorsque toutes les probabilités élémentaires ont la même chance d'apparaitre, on dit que la loi de probabilité est uniforme. On a alors : $p_1 = p_2 = \dots\dots\dots\dots\dots = p_n = \frac{1}{n}$

C'est le cas lorsque l'expérience se fait au hasard, sur des objets indiscernables au toucher (lancers de dés équilibrés, tirages au hasard de boules dans un urne,...........)
On peut alors calculer la probabilité d'évènements en utilisant la propriété ci-dessous.

Propriété :

Si P est la loi uniforme sur un univers fini Ω, alors pour tout événement A :

$$P(A) = \frac{card\ A}{card\ \Omega} = \frac{\text{Nombre de cas favorables à } A}{\text{Nombre de cas possibles}}$$

Exemple :

Dans l'exemple introductif, tous les couples ont la même chance d'être réalisé $P\{(i\,;j)\} = \frac{1}{36}$

c) Propriété d'une loi de probabilité

Propriété :

Soit P une loi de probabilité sur un univers fini Ω. Alors :

• Pour tout événement A, $0 \leq P(A) \leq 1$

• Si A et B sont deux événements tels que A soit contenu dans B ($A \subset B$), alors $P(A) \leq P(B)$

• Si A et B sont deux événements quelconques, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  Si $A \cap B = \varnothing$ (A et B sont incompatibles), alors : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

• Pour tout événement A, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

• $P(\Omega) = 1$; $P(\varnothing) = 0$

Exemple :

Une urne contient 2 boules jaunes, 3 boules rouges et 4 boules bleues.
On tire au hasard une boule de l'urne et on note sa couleur.
Univers des possibles, noté Ω : $\Omega = \{J, R, B\}$
On définit la loi de probabilité P sur Ω par :

Issues	J	R	B
Probabilités	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$

On remarque que toutes les issues élémentaires n'ont pas la même probabilité d'apparition. On dit que ***la loi de probabilité n'est pas équirépartie***.

Exercice :

On lance un dé cubique à 6 faces numérotées de 1 à 6. Le dé est truqué de telle sorte que les probabilités $p_1, p_2, \dots\dots\dots, p_6$ des faces numérotées 1, 2, ..., 6 soient proportionnelles aux numéros des faces.
1. Déterminer les valeurs de chaque probabilité élémentaire.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un numéro pair ?

Correction :

On doit déterminer chaque probabilité de telle sorte que :

Issues	1	2	3	4	5	6
p_i	$1p$	$2p$	$3p$	$4p$	$5p$	$6p$

La somme des probabilités vaut 1. On obtient alors $21p=1$ soit alors $p=\dfrac{1}{21}$

On note A l'événement « obtenir un chiffre pair ». $P(A)=\dfrac{12}{21}=\dfrac{4}{7}$

3) *Variables aléatoires réelles*

a) *Variable aléatoire et loi de probabilité*

Exemple introductif :

Une urne contient une boule rouge, une boule verte et une boule bleue, indiscernables au toucher. On tire au hasard et successivement deux boules de l'urne avec remise. On a :
– chaque boule rouge tirée fait gagner 1 euro.
– chaque boule verte tirée fait gagner 2 euros.
– chaque boule bleue tirée fait perdre 5 euros.

L'univers Ω associé à cette expérience est l'ensemble des couples $(x\,;y)$ d'éléments de l'ensemble $\{R,V,B\}$. On a alors $card\Omega=3^2$. Il y a donc 9 couples possibles.
A chaque issue de l'expérience, on fait correspondre ***le gain algébrique*** (nombre positif ou négatif selon que le gain soit un profit ou une perte) réalisé.
On évalue donc le gain en fonction de chaque tirage. On obtient le tableau suivant :

Tirage	*RR*	*BB*	*VV*	*RB*	*BR*	*RV*	*VR*	*BV*	*VB*
Gain	*2*	*-10*	*4*	*-4*	*-4*	*3*	*3*	*-3*	*-3*

On définit ainsi une fonction $X:\Omega\to\mathbb{R}$ La fonction X est une ***variable aléatoire réelle*** définie sur l'univers Ω.
X prend les valeurs (rangées dans l'ordre croissant): -10 ; -4 ; -3 ; 2 ; 3 ; 4
On note $(X=-10)$ l'événement : « X prend la valeur -10 », c'est-à-dire l'ensemble des issues de l'expérience pour lesquelles le gain vaut -10. Ainsi, on a : $(X=-10)=\{(B\,;B)\}$.
De même, on a : $(X=3)=\{(V\,;R);(R\,;V)\}$
Pour chaque valeur x_1 , x_2 ,........x_6 de la VAR . X, on peut déterminer la probabilité que le gain X prenne la valeur x_i, c'est-à-dire $P(X=x_i)$.
Les tirages se faisant au hasard, sur des boules indiscernables au toucher, P est la loi uniforme sur Ω. Ainsi, tous les événements élémentaires ont la même probabilité $\dfrac{1}{9}$, et on a :

$X=x_i$	*-10*	*- 4*	*- 3*	*2*	*3*	*4*	*Total*
$P(X=x_i)$	$\dfrac{1}{9}$	$\dfrac{2}{9}$	$\dfrac{2}{9}$	$\dfrac{1}{9}$	$\dfrac{2}{9}$	$\dfrac{1}{9}$	*1*

Le tableau ci-dessus donnant les valeurs des probabilités pour chaque événement élémentaire est appelé ***loi de Probabilité de la variable aléatoire réelle X***.

Remarque :

Les événements $(X=x_1),(X=x_2),\ldots\ldots\ldots,(X=x_6)$ forment ***une partition de l'univers*** :

$$\begin{cases}(X=x_1)\cup(X=x_2)\cup\ldots\ldots\cup(X=x_6)=\Omega\\(X=x_i)\cap(X=x_j)=\varnothing\quad\text{si } i\neq j\end{cases}\text{ Alors }\quad\sum_{i=1}^{i=6}P(X=x_i)=P(\Omega)=1.$$

Définition :

Soit Ω l'univers fini associé à une expérience aléatoire.
Une ***variable aléatoire réelle*** (définie sur Ω) est une application $X:\Omega\to\mathbb{R}$
Ainsi, à chaque issue ω, X fait correspondre un unique réel $X(\omega)$.

Remarque :

Ω étant fini, X ne prend donc qu'un nombre fini de valeurs $x_1,x_2,\dots\dots,x_n$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Notations : Soit a un réel.

• $(X=a)$ est l'événement : « X prend la valeur a ». C'est l'ensemble des issues ω de l'expérience pour lesquelles $X(\omega)=a$. $(X=a)$ est donc une partie de Ω.

• $(X<a)$ est l'événement : « X prend des valeurs inférieures strictement à a ».
C'est l'ensemble des issues ω de l'expérience pour lesquelles $X(\omega)<a$.

4) Paramètres d'une variable aléatoire

Définition :

Soit P une probabilité sur un univers fini Ω, et $X:\Omega\to\mathbb{R}$ une variable aléatoire définie sur Ω prenant les valeurs: $x_1,x_2,\dots,x_n$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ avec les probabilités $p_1,p_2,\dots,p_n$ $\forall i\in\{1,2,\dots,n\}$

• ***L'espérance mathématique*** de X est : $E(X)=\sum_{i=1}^{i=n}x_iP(X=x_i)$

• ***La variance*** de X est : $V(X)=E\left[\left(X-E(X)\right)^2\right]$ soit aussi $V(X)=\sum_{i=1}^{i=n}(x_i-E(X))^2P(X=x_i)$

• ***L'écart-type*** de X est : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

Remarque :

La variance est un nombre toujours positif car c'est la somme de produit positif.

Propriété 1 :

Soit P une probabilité sur un univers fini Ω, et $X:\Omega\to\mathbb{R}$ une variable aléatoire définie sur Ω prenant les valeurs $x_1,x_2,\dots,x_n$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$, avec les probabilités $p_1,p_2,\dots,p_n$ $\forall i\in\{1,2,\dots,n\}$. Alors, on a : $V(X)=\sum_{i=1}^{i=n}x_i^2P(X=x_i)-E(X)^2$

Remarque :

On utilise plus aisément cette formule pour calculer la variance. Il suffit en effet de rajouter des lignes dans la loi de probabilité comme le montre l'exemple ci-dessous.

$X=x_i$	*-10*	*- 4*	*-3*	*2*	*3*	*4*	*Total*
$p_i=P(X=x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\sum_{i=1}^{i=n}p_i=1$
p_ix_i	$\frac{-10}{9}$	$\frac{-8}{9}$	$\frac{-6}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{4}{9}$	$E(X)=\sum_{i=1}^{i=n}p_ix_i=\frac{-12}{9}$
$p_ix_i^2$	$\frac{100}{9}$	$\frac{32}{9}$	$\frac{18}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{18}{9}$	$\frac{16}{9}$	$\sum_{i=1}^{i=n}p_ix_i^2=\frac{188}{9}$

• ***L'espérance mathématique de X*** :

Puisque $\sum_{i=1}^{i=n}p_i=1$, on peut écrire : $E(X)=p_1x_1+p_2x_2+\dots\dots\dots p_nx_n=\frac{p_1x_1+p_2x_2+\dots\dots\dots p_nx_n}{p_1+p_2+\dots\dots\dots p_n}$

$E(X)$ est donc ***la moyenne algébrique*** des $x_1, x_2, ..., x_n$ affectés des coefficients $p_1, p_2, ..., p_n$
Ici, $E(X)$ représente le gain algébrique moyen qu'on peut espérer à l'issue d'un tirage.

Remarques :

Si $E(X) < 0$, on dit que le jeu est défavorable au joueur.
Si $E(X) = 0$, on dit que le jeu est équitable.
Dans l'exemple, le jeu est défavorable au joueur et on peut espérer perdre en moyenne 1,33 €

• ***La variance et l'écart type de X :***

$V(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i^2 - E^2(X) = \frac{188}{9} - (\frac{-12}{9})^2$ soit alors en calculant $V(X) = \frac{172}{9}$

Interprétation :

$$V(X) = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{i=n} p_i \times \left(x_i - E(X)\right)^2 = p_1 \times \left(x_1 - E(X)\right)^2 + p_2 \times \left(x_2 - E(X)\right)^2 + ... + p_n \times \left(x_n - E(X)\right)^2$$

$$V(X) = \frac{p_1 \times \left(x_1 - E(X)\right)^2 + p_2 \times \left(x_2 - E(X)\right)^2 + ... + p_n \times \left(x_n - E(X)\right)^2}{p_1 + p_2 + ... + p_n}$$

Or $\left(x_i - E(X)\right)^2$ représente le carré de ***l'écart*** de la valeur x_i de X à la valeur moyenne de X.
Ainsi $V(X)$ est la moyenne algébrique des carrés des écarts des valeurs de X à l'espérance mathématique affectés des coefficients p_i. C'est donc un paramètre qui mesure ***la dispersion*** des valeurs de X par rapport à l'espérance mathématiques.

Propriété 2 :

Soient X et Y deux V.A.R définies sur un même univers Ω et P une probabilité sur Ω.
Alors, quelque soient les nombres a et b réels, on a :

- $E(aX + b) = aE(X) + b$
- $V(aX) = a^2 V(X)$

Démonstration exigible :

Soit X une variable aléatoire prenant n valeurs $\{x_1; x_2; ....; x_n\}$ de probabilités respectives $p_1; p_2; ....; p_n$

Soit $Y = aX + b$. Alors l'ensemble des valeurs prises par Y est $\{ax_1 + b; ax_2 + b; ....; ax_n + b\}$

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b)p_i = \sum_{i=1}^{n} ax_i p_i + bp_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i p_i + b\sum_{i=1}^{n} p_i = aE(X) + b$$

On dit que l'espérance est linéaire.
Si on applique la formule précédente à la variable aléatoire $Y = aX$, on a : $E(Y) = aE(X)$

Soit $V(Y) = \sum_{i=1}^{n} p_i (y_i - E(Y))^2$. On remplace alors dans la formule :

$$V(Y) = \sum_{i=1}^{n} p_i (ax_i - aE(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} a^2 p_i (x_i - E(X))^2 = a^2 \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2 = a^2 V(X)$$

Exercice :

On reprend l'activité introductive avec le jeu de carte.
Déterminer la mise qu'il faut demander à un joueur pour que le jeu soit équitable.

Correction :

Gain	2	8	9	10	11	14	15	16	17	18	19	20	25	30	TOTAL
Proba	$\frac{1}{64}$	$\frac{2}{64}$	$\frac{2}{64}$	$\frac{2}{64}$	$\frac{2}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{2}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{4}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{2}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{30}{64}$	$\frac{9}{64}$	1

On évalue alors l'espérance mathématique. On note G la variable aléatoire Gain.

On obtient $E(G)=\frac{685}{32}$ soit alors $E(G)\approx 21,4$

Afin d'obtenir une espérance mathématique nulle, il suffit de demander une mise de 21,4 Euros.