Fonctions trigonométriques

Capacités attendues en fin de chapitre :

- Placer un point sur le cercle trigonométrique.
- Lier cercle trigonométrique et fonctions sinus et cosinus.
- Traduire graphiquement la parité des fonctions sinus et cosinus.
- Déterminer les valeurs exactes du cosinus et du sinus d'un angle remarquable.

Le mathématicien du chapitre :

Aryabhata (476-550) était un mathématicien indien. Il fut l'un des premiers à expliquer les éclipses lunaires et solaires. Il écrivit des tables de longueurs (dans la même logique que Ptolémée) en latin qui donnèrent naissance à la fonction sinus que l'on connait aujourd'hui.

Dans tout le chapitre, le plan sera rapporté à un repère orthonormal $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$

I. Le cercle trigonométrique

a) Enroulement de la droite numérique

Définition :

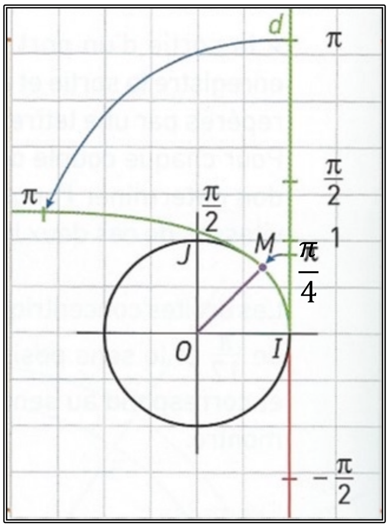
Dans le repère ci-dessus, le cercle trigonométrique C est le cercle de centre O et de rayon 1, parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre appelé sens antihoraire.

Rappel :

Le cercle trigonométrique a donc un périmètre égal à 2π

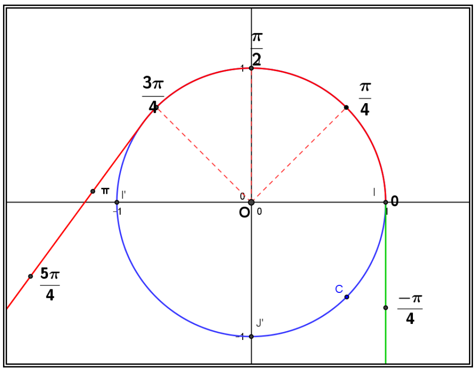
On considère la droite *(d)* tangente au cercle au point I sur laquelle on définit un repère d'origine I.
On enroule alors la droite *(d)* sur le cercle C.
Pour tout réel α, le point d'abscisse α de *(d)* coïncide avec un unique point M sur le cercle C ; M s'appelle alors l'image de α sur le cercle trigonométrique.

Réciproquement, tout point M de cercle trigonométrique est l'image d'une infinité de réels.
Si α est l'un de ces réels, les autres réels ayant comme image M sont de la forme $\alpha + 2k\pi$ ou k est un entier relatif.
$2k\pi$ signifie : à un nombre de tours entiers près.



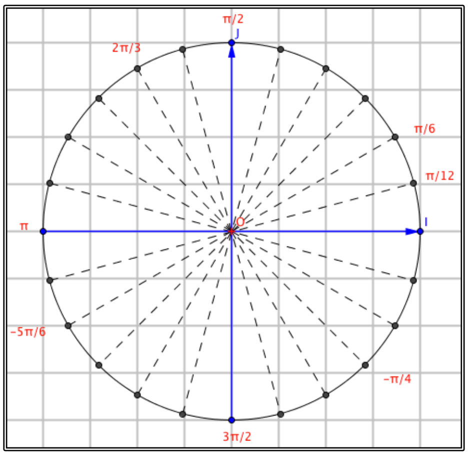
Remarque :

Il faut faire attention à ne pas confondre les fractions et les fractions de tour. En effet parcourir un demi-tour signifie avoir fait une longueur de π.
De même, avoir parcouru un quart de tour signifie avoir fait une longueur de $\frac{\pi}{2}$
On peut également « se promener » du côté des négatifs…



Exercice :

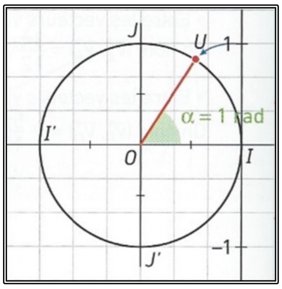
Sur le cercle ci-contre, placer les valeurs suivantes :
$\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{-\pi}{4}, \frac{-5\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}$ et π



Solution :

On remarque que le cercle est partagé en 24 secteurs angulaires égaux. Ainsi, chaque graduation sur le cercle représente $\frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$. On place alors chaque fraction en la transformant en douzième.

b) Le radian



Soit U le point du cercle trigonométrique, image de nombre réel 1 de la droite *(d)*.

On définit alors 1 radian comme la mesure de l'angle $\widehat{IOU}$
On note alors $\widehat{IOU} = 1rad$
Avec cette notation, on a : $\widehat{IOJ} = \frac{\pi}{2}rad$ et $\widehat{IOI'} = \pi\, rad$
On observe donc la proportionnalité des unités degrés et radian.

On peut donc relier les deux unités au travers d'un tableau.

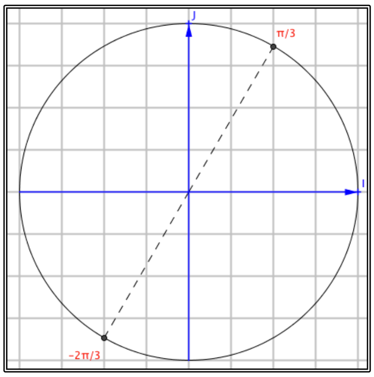
Mesure en degrés	30	45	60	90	180	135	270	-150	-300
Mesure en radians	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{-5\pi}{6}$	$\frac{-5\pi}{3}$

On a donc un coefficient de proportionnalité de $\frac{\pi}{180}$ qui permet de passer de la première ligne à la deuxième par multiplication.

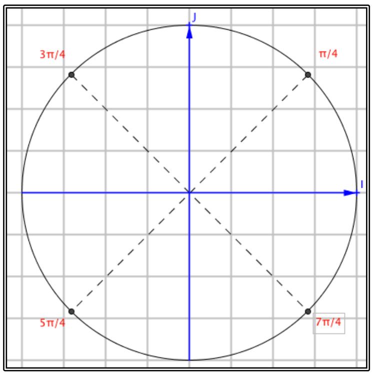
Exercice :

Représenter sur les cercles ci-dessous les points associés aux réels *x* de la forme indiquée.

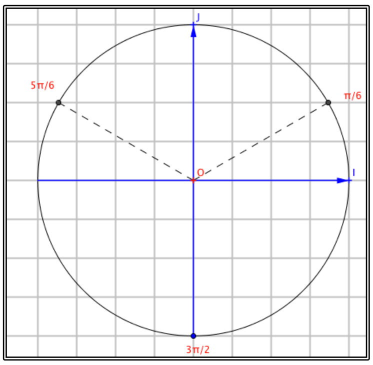
$x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$



$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$



$x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$



- Donner des angles qui ont la même position que $\frac{\pi}{3}$ sur le cercle : $\frac{7\pi}{3}, \frac{-5\pi}{3}, \frac{61\pi}{3}$
- Donner des angles qui ont la même position que $\frac{\pi}{4}$ sur le cercle : $\frac{5\pi}{4}, \frac{-3\pi}{4}, \frac{121\pi}{4}$
- Donner des angles qui ont la même position que $\frac{\pi}{6}$ sur le cercle : $\frac{13\pi}{6}, \frac{-11\pi}{6}, \frac{73\pi}{6}$

On se rend bien compte qu'il n'y a pas d'unicité. C'est pourquoi, parmi tous ces nombres, un est plus important que les autres. Nous étudierons plus loin comment le trouver. On l'appelle la mesure principale.

Notation :

$+2k\pi$ signifie à un nombre de tour près. On dit aussi modulo (2π). Il est donc naturel de chercher la valeur de l'angle, amputée de ces tours inutiles.

c) Mesure principale

Propriété :

Une seule des mesures de l'angle appartient à l'intervalle$]-\pi\ ;\ \pi]$
Cette mesure est la mesure principale de l'angle.

Exemples :

- $\frac{\pi}{3}$ est une mesure principale.
- $\frac{5\pi}{3}$ n'est pas une mesure principale.
- $\frac{-2\pi}{3}$ est une mesure principale.
- $-\pi$ n'est pas une mesure principale.

Remarque :

Afin de déterminer si un angle est une mesure principale, il suffit de regarder si le numérateur est supérieur au dénominateur. On peut souvent trouver la réponse de tête mais dès que les nombres augmentent, un peu de technique est nécessaire.

Exercice :

Déterminer la mesure principale des deux angles suivants : $\frac{68\pi}{3}$ et $\frac{37\pi}{7}$

Solution :

Il suffit de déterminer le nombre de fois que la fraction « rentre » dans un tour. Par exemple, pour une fraction en sur 3, il en rentre 6. Il faut donc doubler à chaque fois le dénominateur.

- $\frac{68\pi}{3} = 11 \times \frac{6\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}$ On peut donc enlever 11 tours et $\frac{68\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}\,(2\pi)$
- $\frac{37\pi}{7} = 2 \times \frac{14\pi}{7} + \frac{9\pi}{7}$ On peut donc enlever 2 tours et $\frac{37\pi}{7} = \frac{9\pi}{7}\,(2\pi)$ Le problème ici est que $\frac{9\pi}{7}$ n'est pas une mesure principale. Il fallait donc aller chercher le multiple de 14 au-dessus du nombre.
  $\frac{37\pi}{7} = 3 \times \frac{14\pi}{7} + \frac{-5\pi}{7}$ On peut donc enlever 3 tours et $\frac{37\pi}{7} = \frac{-5\pi}{7}\,(2\pi)$

Remarque :

La mesure principale est aux angles ce que la fraction irréductible est aux fractions. La valeur la plus petite et la plus simple pour travailler.

Remarque :

Modulo π siginifie à un demi-tour près.

II. La trigonométrie

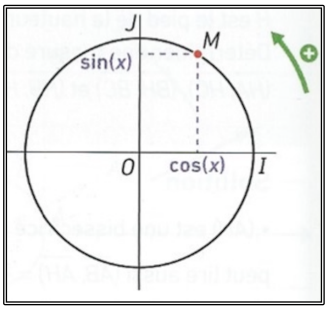
a) Cosinus et sinus d'un nombre réel

Sauf précision contraire, l'unité utilisée est le radian. On considère un cercle trigonométrique C de centre O. Le plan orienté est muni du repère orthonormal direct $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ représenté sur la figure ci-dessous.

Définition :

Soit x un nombre réel et M son image sur le cercle trigonométrique. Dans le repère $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ on appelle :
Cosinus de réel x, noté $cosx$ l'abscisse du point M.
Sinus du réel x, noté $sinx$ l'ordonnée du point M

Remarque :



En lisant sur le cercle ci-contre, on peut déjà obtenir les valeurs particulières :
$cos0 = 1$ et $sin0 = 0$ pour le point I.
$cos\frac{\pi}{2} = 0$ et $sin\frac{\pi}{2} = 1$ pour le point J.
$cos\pi = -1$ et $sin\pi = 0$ pour le symétrique de I par rapport à O
$cos\frac{3\pi}{2} = 0$ et $sin\frac{3\pi}{2} = -1$ pour le symétrique de J par rapport à O

Exemple :

En lisant sur le cercle ci-dessus, donner les valeurs de :
$cos4\pi = 1$ et $sin4\pi = 0$
$cos\frac{11\pi}{2} = 0$ et $sin\frac{-7\pi}{2} = 1$
Que peut-on dire des valeurs de $cos\frac{\pi}{4}$ et $sin\frac{\pi}{4}$?

Propriétés algébriques :

- Pour tout réel x, on a : $-1 \leq cosx \leq 1$ et $-1 \leq sinx \leq 1$ (repérage sur le cercle trigo)
- Pour tout réel x, $cos^2x + sin^2x = 1$ (relation fondamentale de la trigonométrie)

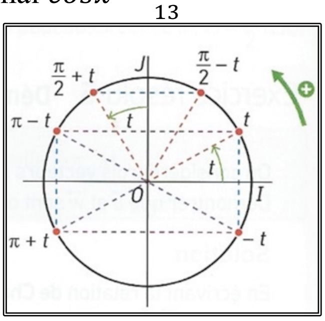
Exercice :

Déterminer la valeur exacte de $cosx$ sachant que $sinx = \frac{-12}{13}$ et que $x \in \left]\frac{-\pi}{2}; 0\right[$

Solution :

On utilise la relation fondamentale de la trigonométrie : $cos^2x + sin^2x = 1$
Soit en remplaçant $cos^2x + \frac{144}{169} = 1$. On a donc $cos^2x = \frac{25}{169}$
Il y a donc deux réponses possibles : $cosx = \frac{5}{13}$ ou $cosx = \frac{-5}{13}$ Puisque $x \in \left]\frac{-\pi}{2}; 0\right[$ il est donc situé dans le 4$^{\text{ème}}$ quadrant ou le cosinus est positif. On a donc au final $cosx = \frac{5}{13}$

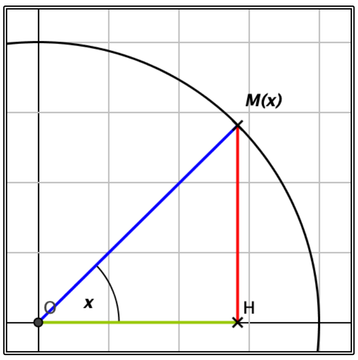
b) ***Les angles associés***



Cette notion est si importante qu'elle fait l'objet d'un complément de cours.
Référez-vous donc à la Fiche Méthode : les angles associés.

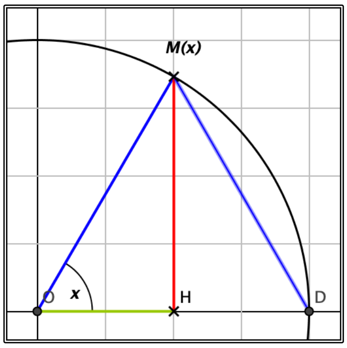
c) ***Valeurs remarquables***

- ***Cas du triangle isocèle***



Dans le triangle OMH, rectangle isocèle en H, on sait que l'angle à la base vaut 45 °. Puisque $\frac{\pi}{4}$ est la moitié de $\frac{\pi}{2}$, on a donc que $x = \frac{\pi}{4}$. On utilise le théorème de Pythagore : $OM^2 = OH^2 + HM^2$ soit $1 = 2HM^2$
On a donc $HM = \frac{1}{\sqrt{2}}$ soit enfin $HM = \frac{\sqrt{2}}{2}$
En utilisant les formules trigonométriques dans un triangle rectangle et puisque $OM = 1$, on obtient :
$cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

- ***Cas du triangle équilatéral***



Dans le triangle OMD, équilatéral, on sait que tous les angles valent 60 °. Puisque $\frac{\pi}{3}$ vaut $\frac{2}{3}$ de $\frac{\pi}{2}$, on a donc que $x = \frac{\pi}{3}$. $\left(60 = \frac{2}{3} \times 90\right)$ On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle OMH : $OM^2 = OH^2 + HM^2$ soit $1 = HM^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$

On a donc $HM^2 = \frac{3}{4}$ soit $HM = \frac{\sqrt{3}}{2}$

En utilisant les formules trigonométriques dans un triangle rectangle et puisque $OM = 1$, on obtient :

$cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Puisque dans un triangle rectangle, les angles aigus sont complémentaires, on a :$\widehat{OMH} = \frac{\pi}{6}$

Ainsi $sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ et $cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

- ***Tableau complet des valeurs***

Il faut absolument connaître les valeurs remarquables des angles de base. On peut ensuite retrouver en changeant de quadrant les valeurs d'autres angles en utilisant les angles associés. Le tableau basique est assez simple à comprendre.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$cosx$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$sinx$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Pour retenir ces valeurs, il suffit de se rendre compte que les valeurs du cosinus décroissent avec $\frac{\sqrt{4}}{2}, \frac{\sqrt{3},}{2} \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{1},}{2} \frac{\sqrt{0}}{2}$ et que les valeurs de sinus croissent, en d'autres termes, savoir compter de 0 à 4.

Exemples :

Donner les valeurs exactes des nombres suivants en utilisant les angles associés :

- $cos\frac{3\pi}{2} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$
- $sin\frac{7\pi}{2} = sin\left(4\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -1$
- $cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$
- $sin\frac{-2\pi}{3} = -sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

III. Les fonctions trigonométriques

a) Parité et périodicité

Définition :

Soit une fonction f définie sur un ensemble D_f symétrique par rapport à l'origine, on dit que f est paire si pour tout $x \in D_f$: $f(-x) = f(x)$

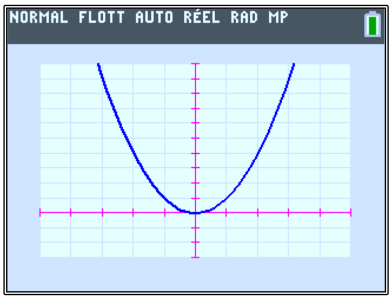
La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exemples :

Toutes les fonctions polynômes ne contenant que des monômes de degré paires sont paires
Par exemple, $f(x) = 5x^2 + 3$ est une fonction paire.

Exemple :

La fonction $f : x \mapsto x^2$ est une fonction paire. Sa représentation graphique admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie



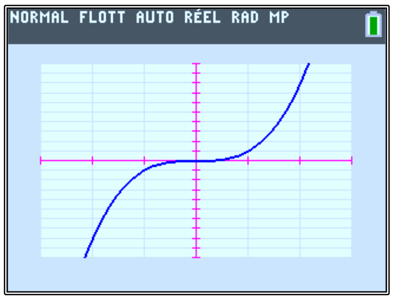
Remarque :

La fonction $f : x \mapsto 3x^2 - 5x + 2$ n'est pas une fonction paire bien que sa représentation graphique soit une parabole.

Définition :

Soit une fonction *f* définie sur un ensemble D_f symétrique par rapport à l'origine, on dit que *f* est impaire si pour tout $x \in D_f$: $f(-x) = -f(x)$
La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

La fonction $f : x \mapsto x^3$ est une fonction impaire.
Sa représentation graphique admet l'origine du repère comme centre de symétrie



Remarque :

La fonction $f : x \mapsto x^3 - 5x$ est une fonction impaire.

Attention :

Il y a des courbes qui possèdent des axes de symétries ou des centres de symétrie mais les fonctions qu'elles représentent ne sont ni paires ni impaires.

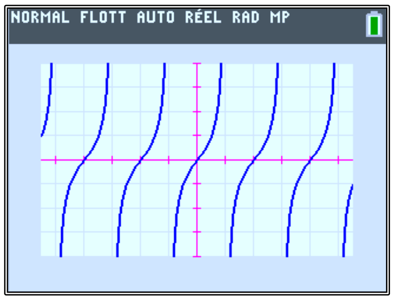
Définition :

Soit une fonction *f* définie sur un ensemble D_f et soit *T* un réel non nul tel que :

Pour tout $x \in D_f, x + T \in D_f$, et $f(x+T) = f(x)$
On dit alors que *f* est périodique de période *T* ou plus simplement *T*-périodique.

Construction

Pour obtenir la courbe de *f*, on trace la représentation graphique sur une période puis on translate le modèle sur les périodes adjacentes.
Ci- contre, la représentation graphique de la fonction tangente. Elle est $\pi -$ périodique



Attention :

Toutes les fonctions trigonométriques ne sont pas nécessairement $2\pi -$ périodique

b) La fonction sinus

- ***Réduction du domaine d'étude***

La fonction sinus est $2\pi -$ périodique. On peut donc restreindre son étude sur une période, centrée en 0. On peut donc l'étudier sur $[-\pi; \pi]$
Puisque la fonction sinus est impaire, on peut alors réduire son étude sur $[0; \pi]$car sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine.

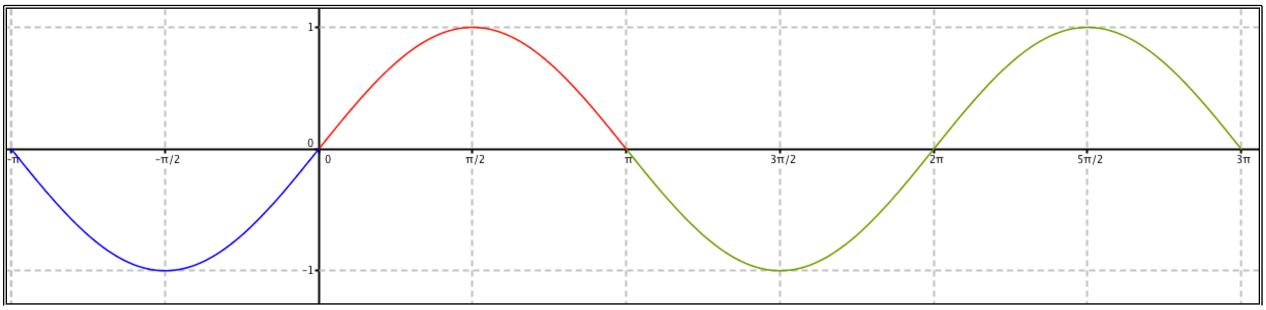
- ***Variations de la fonction sinus sur*** $[0; \pi]$

La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur$[0; \pi]$ On a donc $sin'(x) = cos(x)$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
Sin'		+		-	
Sin		↗		↘	

- ***<u>Représentation graphique</u>***

On note C la représentation graphique de la fonction sinus sur $\mathbb{R}$, C_0 et C_1 les représentations graphiques de la fonction sinus sur $[0;\pi]$ et $[-\pi;\pi]$ respectivement.
La fonction sinus étant impaire : C_1 se déduit de C_0 par la symétrie centrale de centre O.
La fonction sinus étant $2\pi -$ périodique: C se déduit de C_1 par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$



c) ***<u>La fonction cosinus</u>***

- ***<u>Réduction du domaine d'étude</u>***

La fonction cosinus est $2\pi -$ périodique. On peut donc restreindre son étude sur une période, centrée en 0. On peut donc l'étudier sur $[-\pi;\pi]$
Puisque la fonction cosinus est paire, on peut alors réduire son étude sur $[0;\pi]$car sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

- ***<u>Variations de la fonction cosinus sur</u>*** $[0;\pi]$

La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$
donc sur $[0;\pi]$et $\cos'(x) = -sin(x)$

x	0		π
Cos'		-	
Cos		↘	

- ***<u>Représentation graphique</u>***

On note C la représentation graphique de la fonction cosinus sur $\mathbb{R}$, C_0 et C_1 les représentations graphiques de la fonction cosinus sur $[0;\pi]$ et $[-\pi;\pi]$respectivement.
La fonction cosinus étant paire : C_1 se déduit de C_0 par la symétrie axiale d'axe l'axe des ordonnées.
La fonction cosinus étant 2π-périodique : C se déduit de C_1 par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$