Suites arithmétiques et géométriques

Capacités attendues en fin de chapitre :

- Pour une suite arithmétique ou géométrique, calculer le terme général, la somme des termes consécutifs et le sens de variation.
- Modéliser un phénomène discret à croissance linéaire par une suite arithmétique.
- Modéliser un phénomène discret à croissance exponentielle par une suite géométrique.
- Conjecturer, dans des cas simples, la limite éventuelle d'une suite

Le mathématicien du chapitre :

Nicolas Oresme, mathématicien français du 14ème siècle est le premier à formaliser les suites arithmétiques et géométriques. Il calcula également la somme de certaines suites. Il fut le premier à utiliser le français dans les textes mathématiques. Il inventa également avant Descartes le premier système de coordonnées. Il était également persuadé, bien avant Galilée que la terre tournait autour du soleil.

I. Les suites arithmétiques

1) Définition

Les suites arithmétiques sont un peu aux suites ce que les fonctions affines sont aux fonctions. Grossièrement, une suite est dite arithmétique si pour passer d'un terme au suivant on ajoute toujours la même quantité. Cette quantité est appelée ***la raison*** de la suite

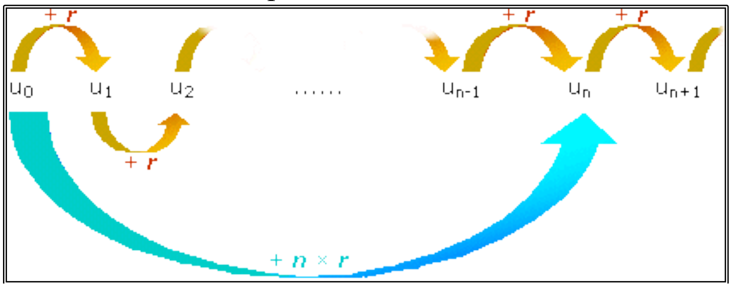
Définition :

Dire que la suite (u_n) est arithmétique de raison r signifie que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$

Remarque :

On peut remarquer que la différence entre deux termes consécutifs est constante.

Ainsi, si (u_n) est une suite est arithmétique, on a :



2) Formules explicites

Définition :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
Dans le cas où le premier terme est de de rang 0, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$
Dans le cas où le premier terme est de rang p, $\forall n \geq p, u_n = u_p + (n-p)r$

Remarques :

- Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, il suffit de prouver que la différence entre deux termes consécutifs est constante. C'est-à-dire qu'il suffit de montrer que pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = cste$
- La suite des entiers naturels est une suite arithmétique de raison 1.
- Les années de coupe du monde de rugby forment une suite arithmétique de raison 4 et de premier terme 1987.

Exercice :

(u_n) est une suite arithmétique de raison *7* et de premier terme $u_0 = 5$

a) Calculer les quatre premiers termes de la suite.
b) Donner la formule explicite de la suite (u_n).
c) Déterminer l'entier *n* tel que $u_n = 656$

Correction :

a) On calcule de proche en proche les premiers termes. Inutile décrire la formule explicite, c'est la deuxième question… $u_0 = 5$ puis $u_1 = 12$ puis $u_2 = 19$ puis $u_3 = 26$
b) Puisque le premier terme est de rang 0, on a directement : $u_n = 5 + 7n$
c) On cherche *n* afin que $u_n = 656$. On résout donc une équation en *n*, entier naturel $u_n = 656$ soit alors $5 + 7n = 656$ soit donc $n = 93$
Heureusement que le résultat est un entier naturel…

Exercice :

(u_n) est une suite arithmétique telle que $u_7 = 17$ et $u_{13} = 41$. Déterminer la raison et le premier terme de la suite u_0.

Correction :

On peut utiliser deux méthodes : la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues ou l'utilisation simple d'une formule explicite.
On applique ici la formule $\forall n \geq p, u_n = u_p + (n-p)r$ soit ici $u_{13} = u_7 + (13-7)r$
$41 = 17 + 6r$ soit alors $r = 4$
A l'aide de $u_n = u_0 + 4n$, on remplace $u_{13} = u_0 + 52$ soit donc $u_0 = -11$
On obtient donc la formule explicite $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -11 + 4n$

3) Variations

Puisqu'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même terme, les variations d'une suite arithmétique sont assez simples.

Définition :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison *r* :
Si *r* est positif, (u_n) est croissante.
Si *r* est négatif, (u_n) est décroissante.
Si *r* est nul, (u_n) est constante.

Remarque :

Les variations d'une suite arithmétique sont donc indépendantes du premier terme.

Exemple :

Soit la suite (u_n), de formule explicite $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 7 + 3n$
Alors, naturellement, (u_n) est croissante puisque *r* est positif.

4) Somme de termes

Exemple introductif :

On raconte qu'à 10 ans, Karl Friedrich GAUSS trouva la méthode pour calculer la somme des 100 premiers entiers de tête, notée $S_{100} = 1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100$
L'idée avancée par l'enfant est simple. Écrire la somme dans les deux sens et ajouter.

$$\begin{cases} S_{100} = 1 + \quad 2 + \quad 3 + \cdots + 99 + 100 \\ S_{100} = 100 \; + 99 \; + 98 \; + \cdots + 2 \; + 1 \end{cases}$$

En ajoutant les deux lignes, on observe que la somme des deux nombres l'un sous l'autre fait toujours 101. On obtient $2S_{100} = 101 + 101 + 101 + \cdots + 101 + 101$ avec 100 fois le 101.
Soit alors $S_{100} = \frac{101 \times 100}{2}$ donc $S_{100} = 5050$

Propriété :

Soit n un entier naturel, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(n+1)\times n}{2}$

Propriété :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et n un entier naturel.
On note $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ Alors $S_n = \frac{(u_0+u_n)\times(n+1)}{2}$

Remarque :

On retient la formule par la phrase suivante :
Premier terme ajouté au dernier terme fois nombre de terme divisé par deux.
La formule sera ainsi plus facile à appliquer si la somme ne commence pas à u_0

Exercice 1 :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 8$
Déterminer la somme de ses 20 premiers termes.

Correction :

Attention, puisque la suite débute à u_0, on doit calculer $S_{19} = u_0 + u_1 + \cdots + u_{19}$
On applique alors la formule $S_{19} = \frac{(u_0+u_{19})\times(19+1)}{2}$
On a besoin de la connaissance du 20ème terme. On écrit la formule explicite pour l'obtenir.
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 8 + 2n$ soit donc $u_{19} = 46$; Ainsi $S_{19} = \frac{(8+46)\times(19+1)}{2}$ soit $S_{19} = 540$

Exercice 2

Calculer la somme $S = 3 + 10 + 17 + 24 + \cdots + 871 + 878$

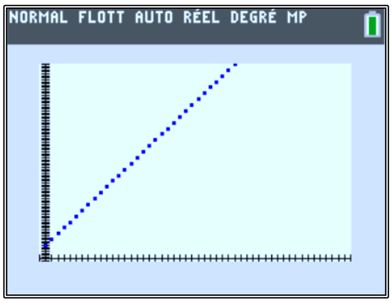
Correction :

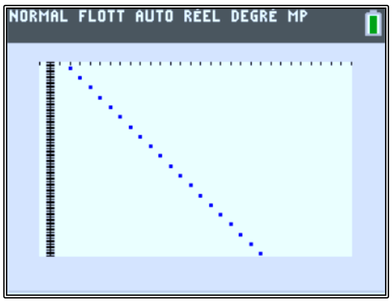
Puisque nous sommes dans la partie sur les suites arithmétiques, il doit falloir chercher de ce côté-là… On observe que les nombres augmente de 7 en 7. On peut donc conjecturer qu'il s'agit d'une suite arithmétique de raison 7 et de premier terme $u_0 = 3$. Le problème est qu'on ne connaît pas le nombre de termes de cette suite.
Il faut donc déterminer l'entier n tel que $u_n = 878$. On écrit d'abord la formule explicite de la suite $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3 + 7n$. Je cherche n tel que $3 + 7n = 878$ soit alors $n = 125$
On a alors $S_{125} = \frac{(3+878)\times(125+1)}{2}$ soit donc $S_{125} = 55503$

5) Notion de limite

La notion de limite est l'étude de la valeur du terme de la suite lorsque n devient très grand.
On va prendre deux cas pour comprendre.

(u_n) arithmétique de raison 3 avec $u_0 = 7$ (u_n) arithmétique de raison -5 avec $u_0 = 6$





On observe que plus n augmente, plus le terme u_n devient grand en valeur absolue.

Propriété :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
Si r est positif, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$
Si r est négatif, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$

Remarque :

Ici encore, le premier terme n'a aucune influence sur le résultat.
La seule connaissance de la raison permet de donner le comportement de la suite au voisinage de l'infini. Une suite arithmétique ne peut jamais tendre vers un nombre.

II. Suites géométriques

1) Définition

Les suites géométriques sont chez les suites ce que les fonctions puissances sont aux fonctions. Une suite est dite géométrique si pour passer d'un terme au suivant on multiplie toujours par la même quantité. Cette quantité est toujours appelée ***la raison*** de la suite mais la lettre change.

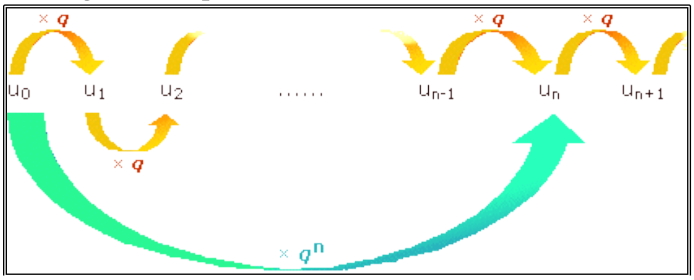
Définition :

Dire que la suite (u_n) est géométrique de raison $\boldsymbol{q}$ signifie que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = q \times u_n$

Remarque :

On peut remarquer que le quotient entre deux termes consécutifs est constant.

Ainsi, si (u_n) est une suite géométrique alors :



Remarque :

Pour éviter toute confusion, les suites géométriques sont souvent notées (v_n)

2) Formules explicites

Définition :

Soit (v_n) une suite géométrique de raison q.
Dans le cas où le premier terme est de de rang 0, $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times q^n$
Dans le cas où le premier terme est de rang p, $\forall n \geq p, v_n = v_p \times q^{n-p}$

Remarques :

- Pour démontrer qu'une suite est géométrique, il suffit de prouver que le quotient entre deux termes consécutifs est constant. C'est-à-dire qu'il suffit de montrer que pour tout entier n, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = cste$
- Les puristes n'aiment pas trop cette méthode car rien n'indique que le terme v_n n'est pas nul.

Exercice :

(v_n) est une suite géométrique de raison *4* et de premier terme $v_5 = 3$

a) Calculer les quatre premiers termes de la suite.
b) Donner la formule explicite de la suite (v_n).
c) Déterminer l'entier n tel que $v_n = 3072$

Correction :

a) On calcule de proche en proche les premiers termes. Inutile décrire la formule explicite, c'est la deuxième question… $v_5 = 3$ puis $v_6 = 12$ puis $v_7 = 48$ puis $v_8 = 192$

b) Puisque le premier terme est de rang 5, on a directement : $v_n = v_5 \times q^{n-5}$
Soit $v_n = 3 \times 4^{n-5}$

c) On cherche n afin que $v_n = 3072$. On résout donc une équation en n, entier naturel
$v_n = 3072$ soit alors $3 \times 4^{n-5} = 3072$ soit $4^{n-5} = 1024$ donc $n = 10$
Le résultat est encore un entier naturel…

Exercice :

(v_n) est une suite géométrique telle que $v_7 = 5$ et $v_{11} = 6480$. Déterminer la raison et donner une formule explicite.

Correction :

On va tout d'abord écrire la formule explicite : $\forall n \geq 7, v_n = v_7 \times q^{n-7}$
Soit ici $6480 = 5 \times q^4$ En simplifiant l'équation, on obtient : $q^4 = 1296$
On obtient alors deux valeurs pour q : $q = 6$ ou $q = -6$
On a donc deux suites qui vérifient les conditions données :
$\forall n \geq 7, v_n = 5 \times 6^{n-7}$ ou $\forall n \geq 7, v_n = 5 \times (-6)^{n-7}$

3) Variations

Pour une suite géométrique, le signe du premier terme à un importance pour les variations.

Définition :

Soit (v_n) une suite géométrique de raison q positive et de premier terme v_0
Si $0 < q < 1$ et $v_0 < 0$, alors (v_n) est croissante.
Si $0 < q < 1$ et $v_0 > 0$, alors (v_n) est décroissante.

Si $q > 1$ et $v_0 < 0$, alors (v_n) est décroissante.
Si $q > 1$ et $v_0 > 0$, alors (v_n) est croissante.

Si $q = 1$, alors (v_n) est constante.

Remarque :

- Si $q < 0$, la suite est dite alternée. Elle change de signe à chaque terme et n'est donc pas monotone.
- La valeur de q fait que la suite va se contracter ou au contraire exploser.

Démonstration :

Soit (v_n) une suite géométrique de raison q positive et de premier terme v_0
On écrit alors la formule explicite $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times q^n$
On évalue la différence de deux termes consécutifs : $v_{n+1} - v_n = v_0 \times q^{n+1} - v_0 \times q^n$
On factorise l'expression $v_{n+1} - v_n = v_0 \times q^n(q-1)$
Puisque c'est le signe de la différence qui nous intéresse, une discussion s'opère sur le signe de chaque facteur du produit. On retrouve alors toutes les possibilités évoquées ci-dessus.

4) Somme de termes

Exemple introductif :

On s'intéresse à l'exemple basique afin de pouvoir prolonger la formule dans le cas général.
Soit (v_n) une suite géométrique de raison q (non nul et différente de 1) et de premier terme $v_0 = 1$ On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = q^n$
On cherche à évaluer $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ soit ici $S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$
On écrit deux lignes qu'on va soustraire membre à membre :

$$\begin{cases} S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n \\ qS_n = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n+1} \end{cases}$$

On obtient donc :$S_n - qS_n = 1 - q + q - q^2 + q^2 - q^3 + \cdots + q^n - q^{n+1}$
On observe dans le membre de droite une somme télescopique (du mot télescopage)
Ainsi $(1 - q)S_n = 1 - q^{n+1}$. On obtient ainsi le résultat ci-dessous :

Propriété :

Si $q \neq 1$, alors $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Propriété :

Soit (v_n) une suite géométrique de raison q $(q \neq 1)$ et de premier terme v_0
On note $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$
Alors $S_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Remarque :

Si la somme ne commence pas à v_0 mais à v_p, il suffit d'évaluer le nombre de terme et de le mettre à l'exposant.

Exercice 1 :

Soit (v_n) une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = 5$
Déterminer la somme de ses 10 premiers termes puis des 10 suivants.

Correction :

Attention, puisque la suite débute à v_0, on doit calculer $S_9 = v_0 + v_1 + \cdots + v_9$
On applique alors la formule $S_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
Il n'est pas nécessaire ici de connaître le 10ème terme pour évaluer la somme.
$S_9 = v_0 \times \frac{1-q^{10}}{1-q}$ soit ici $S_9 = 5 \times \frac{1-2^{10}}{1-2}$ On a donc $S_9 = 5115$
On cherche maintenant $S = v_{10} + v_{11} + \cdots + v_{19}$
On applique la formule : $S = v_{10} \times \frac{1-q^{10}}{1-q}$ soit $S = 5120 \times \frac{1-2^{10}}{1-2}$ et on a $S = 5237760$

Exercice 2

Calculer la somme $S = 2 + 6 + 18 + 54 + \cdots + 4374 + 13122$

Correction :

On observe que les termes sont multipliés par 3 à chaque fois. On peut donc conjecturer qu'il s'agit d'une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = 2$. Le problème est qu'on ne connaît pas le nombre de termes de cette somme.
Il faut donc déterminer l'entier n tel que $v_n = 13122$. On écrit d'abord la formule explicite de la suite $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 2 \times 3^n$. Je cherche n tel que $2 \times 3^n = 13122$ soit alors $n = 8$
On a alors $S_8 = 2 \times \frac{1-3^9}{1-3}$ soit donc $S_8 = 19682$

5) Notion de limite

Propriété :

Soit (v_n) une suite géométrique de raison q positive et de premier terme v_0
Si $0 < q < 1$, alors $\lim_{n \to \infty} v_n = 0$
Si $q > 1$, alors (v_n) est divergente

Remarque :

Il y aurait beaucoup d'autres cas à étudier. La liste sera établie en Terminale spécialité.
Le signe du premier terme a une influence sur le résultat final.

III. Suites auxiliaires

Il y a bien plus de suites qui ne sont pas arithmétiques et géométriques que le contraire.
Leur étude nécessite de contourner le problème. C'est la raison pour laquelle on étudie une suite auxiliaire qui va nous permettre de revenir vers la suite initiale. Pas d'inquiétude, les exercices sont toujours guidés et la suite auxiliaire toujours donnée.

1) Suites arithmético-géométriques

C'est le cas le plus fréquent des suites auxiliaires. Il sera étudié plus longuement en Terminale.

Définition :

Une suite est appelée arithmético-géométrique s'il existe deux nombres a et b tels que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = au_n + b$

Remarque :

Si a est égal à 1, on retrouve une suite arithmétique. Si b est nul, on retrouve une suite géométrique.

Méthode :

On va étudier une suite auxiliaire et montrer que celle-ci est géométrique. On pourra ainsi en déduire une formule explicite de la suite initiale.

Exemple 1 :

Une société de crédit propose à ses clients de mettre à leur disposition une somme S de 6000 € remboursable par prélèvements mensuels fixes de 300 €. Le taux d'intérêt annoncé est de 1,5%.
On se propose de déterminer le nombre de mois nécessaires au remboursement de cette somme et le montant effectivement payé par chaque client.
Si le montant dû le dernier mois est inférieur à 300 €, le client paye le forfait de 300 €.
On pose $u_0 = 6000$ et on appelle u_n le montant restant à rembourser.

1) Montrer que pour tout n, $u_1 = 6000 \times 1{,}015 - 300$. Calculer alors u_2.
2) Montrer de manière générale que : $u_{n+1} = 1{,}015u_n - 300$
3) On donne : $v_n = u_n - 20000$ Monter que (v_n) est une suite géométrique.
4) Donner l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.
5) Combien de mois sont-ils nécessaires à l'extinction de la dette ?

Correction :

1) Puisque le taux d'intérêt est de 1,5 %, il y a un coefficient multiplicateur de $1 + \frac{t}{100}$ à appliquer. $1 + \frac{1{,}5}{100} = 1{,}015$. En enlevant les 300 euros remboursés, on obtient un montant dû de $u_1 = 6000 \times 1{,}015 - 300$ soit donc $u_1 = 5790$
   On calcule alors u_2 de la même manière : $u_2 = 5790 \times 1{,}015 - 300$ soit $u_2 = 5576{,}85$
2) Puisque chaque mois, on rembourse 300 euros, on doit enlever cette somme au mois précédent. Cependant, un intérêt de 1,5 % s'applique sur le montant restant dû le mois d'avant. On a donc pour tout entier naturel : $u_{n+1} = 1{,}015u_n - 300$
3) On évalue $v_{n+1} = u_{n+1} - 20000$. On injecte alors l'expression de u_n puis on réduit l'expression $v_{n+1} = 1{,}015u_n - 300 - 20000$ soit $v_{n+1} = 1{,}015u_n - 20300$. En factorisant par le coefficient multiplicateur, $v_{n+1} = 1{,}015(u_n - 20000)$
   Soit $v_{n+1} = 1{,}015v_n$. (v_n) est donc une suite géométrique de raison 1,015 et de premier terme $v_0 = -14000$
4) On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -14000 \times 1{,}015^n$. En inversant la relation liant (v_n) et (u_n), on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 20000 - 14000 \times 1{,}015^n$
5) On cherche le nombre de mois nécessaire à l'extinction de la dette. On cherche finalement l'entier n tel que $u_n = 0$ soit l'équation $20000 - 14000 \times 1{,}015^n = 0$

La résolution algébrique de cette équation n'est pas au programme de première. Elle fait appel au logarithme népérien. Nous allons donc contourner le problème et mettre en place un algorithme (puis un code python) qui permet de répondre à la question. Il faut donc utiliser une boucle ouverte (Tant Que $u_n > 0$) afin de déterminer n.

```
VARIABLES
  U EST_DU_TYPE NOMBRE
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  U PREND_LA_VALEUR 6000
  N PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (U>0) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    N PREND_LA_VALEUR N+1
    U PREND_LA_VALEUR 1,015*U - 300
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER "NBRE DE MOIS:"
  AFFICHER N
FIN_ALGORITHME
```

```python
def dette():
    u = 6000
    n = 0
    while u >= 0:
        n = n + 1
        u = 1.015*u - 300
    return n
```

```
> dette()
24
```

Exemple 2 :

Construire un programme qui permette de calculer la somme des n premiers termes avec la suite définie par :$\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n - 4, n \geq 1 \end{cases}$

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
  S EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  S PREND_LA_VALEUR 0
  u PREND_LA_VALEUR 5
  POUR k ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    S PREND_LA_VALEUR S+u
    u PREND_LA_VALEUR 1,5*u-4
    FIN_POUR
  AFFICHER S
FIN_ALGORITHME
```

```python
def somme_2(n):
    s = 0
    u = 5
    for i in range(n):
        s = s + u
        u = 1.5*u - 4
    return (s)
```

Pour $n = 3$,

```
> somme_2(3)
9.75
>
```

Remarque :

Attention, l'ordre entre les deux lignes dans la boucle a une importance capitale.

2) ***Deux exercices de Bac modifiés***

Exemple 1 :

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par :$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{9}{6-v_n} \end{cases}$.

On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par $w_n = \frac{1}{v_n - 3}$.

1) Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{-1}{3}$..
2) En déduire l'expression de (w_n), puis celle de (v_n) en fonction de n.
3) Déterminer la limite de la suite (v_n).

Correction :

1) Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, il suffit de montrer que la différence de deux termes consécutifs est constante : $w_{n+1} - w_n = \frac{1}{v_{n+1}-3} - \frac{1}{v_n-3}$. On injecte la formule de récurrence de (v_n) $w_{n+1} - w_n = \frac{1}{\frac{9}{6-v_n}-3} - \frac{1}{v_n-3}$ soit en mettant au même dénominateur $w_{n+1} - w_n = \frac{6-v_n}{9-18+3v_n} - \frac{1}{v_n-3}$ puis $w_{n+1} - w_n = \frac{6-v_n}{3(v_n-3)} - \frac{1}{v_n-3}$ et enfin $w_{n+1} - w_n = \frac{6-v_n}{3(v_n-3)} - \frac{3}{3(v_n-3)}$. $w_{n+1} - w_n = \frac{3-v_n}{3(v_n-3)}$ soit donc $w_{n+1} - w_n = \frac{-1}{3}$
(w_n) est arithmétique de raison $\frac{-1}{3}$ et de premier terme $w_0 = \frac{-1}{2}$
2) On a donc, pour tout entier naturel n, $w_n = \frac{-1}{2} + \frac{-1}{3}n$
En versant la relation $w_n = \frac{1}{v_n-3}$ en $v_n = 3 + \frac{1}{w_n}$. On remplace alors la formule explicite trouvée ci-dessus : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 3 + \frac{1}{\frac{-1}{2}+\frac{-1}{3}n}$
3) Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-1}{2} + \frac{-1}{3}n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 3$

Exemple 2 :

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n} \end{cases}$.

1) Calculer u_1 et u_2.

Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.

2) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.
3) Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
4) En déduire la formule explicite de (u_n)
5) Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

Correction :

1) Un calcul rapide donne $u_1 = \frac{3}{4}$ puis $u_2 = \frac{9}{10}$
2) On évalue donc $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}}$ soit donc $v_{n+1} = \frac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{1-\frac{3u_n}{1+2u_n}}$. En mettant au même dénominateur puis en simplifiant, $v_{n+1} = \frac{3u_n}{1-u_n}$ et donc $v_{n+1} = 3v_n$. (v_n)est bien une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = 1$
3) On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 1 \times 3^n$
4) En inversant la relation, on obtient $u_n = \frac{v_n}{1+v_n}$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{3^n}{1+3^n}$
5) En utilisant les suites géométriques, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$