Somme de variables aléatoires

Capacités attendues en fin de chapitre :

- Représenter une variable comme une somme de variables aléatoires plus simples.
- Calculer l'espérance d'une variable aléatoire, notamment en utilisant la propriété de linéarité.
- Calculer la variance d'une variable aléatoire, notamment en l'exprimant comme somme de variables aléatoires indépendantes.

Le mathématicien du chapitre :

Johann Samuel Kœnig (1712 –1757) est un mathématicien allemand et un élève de Jean Bernoulli. Il fut aussi philosophe. Il est nommé en 1740 membre de l'académie des Sciences de Paris. Son nom est associé au théorème de Kœnig-Huygens. En statistiques et probabilité, ce théorème est une identité remarquable qui relie variance et moyenne. Il permet de calculer plus simplement la variance.

1) Rappel de première sur les variables aléatoires

a) Exemple introductif

Une urne contient une boule rouge, une boule verte et une boule bleue, indiscernables au toucher. On tire au hasard et successivement deux boules de l'urne avec remise. On a :

- Chaque boule rouge tirée fait gagner 1 euro.
- Chaque boule verte tirée fait gagner 2 euros.
- Chaque boule bleue tirée fait perdre 5 euros.

L'univers Ω associé à cette expérience est l'ensemble des couples $(x;y)$ d'éléments de l'ensemble $\{R,V,B\}$. On a alors $card(\Omega) = 3^2$. Il y a donc 9 couples possibles.
A chaque issue de l'expérience, on fait correspondre ***le gain algébrique*** (nombre positif ou négatif selon que le gain soit un profit ou une perte) réalisé.
On évalue donc le gain en fonction de chaque tirage. On obtient le tableau suivant :

Tirage	$(R;R)$	$(B;B)$	$(V;V)$	$(R;B)$	$(B;R)$	$(R;V)$	$(V;R)$	$(B;V)$	$(V;B)$
Gain	*2*	*-10*	*4*	*-4*	*-4*	*3*	*3*	*-3*	*-3*

On définit ainsi une fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}^+$. La fonction X est une ***variable aléatoire réelle*** définie sur l'univers Ω.
X prend les valeurs (rangées dans l'ordre croissant): -10 ; -4 ; -3 ; 2 ; 3 ; 4
On note $(X = -10)$l'évènement : « X prend la valeur -10 », c'est-à-dire l'ensemble des issues de l'expérience pour lesquelles le gain vaut -10. Ainsi, on a : $(X = -10) = \{(B;B)\}$.
De même, on a : $(X = 3) = \{(V;R);(R;V)\}$
Pour chaque valeur $x_1, x_2, \ldots, x_6$ de la VAR X, on peut déterminer la probabilité que le gain X prenne la valeur x_i, c'est-à-dire $P(X = x_i)$.
Les tirages se faisant au hasard, sur des boules indiscernables au toucher, P est la loi uniforme sur Ω. Ainsi, tous les événements élémentaires ont la même probabilité $\frac{1}{9}$, et on a :

$X = x_i$	*-10*	*- 4*	*- 3*	*2*	*3*	*4*	*Total*
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	*1*

Le tableau ci-dessus donnant les valeurs des probabilités pour chaque événement élémentaire est appelé ***loi de Probabilité de la variable aléatoire réelle*** X.

Remarque :

Les événements $(X = x_1), (X = x_2), \dots, (X = x_6)$ forment ***une partition de l'univers,*** aussi appelé système complet d'évènements. On a les propriétés suivantes :
$\begin{cases} (X = x_1) \cup (X = x_2), \cup \ \dots \cup \ (X = x_6) = \Omega \\ (X = x_i) \cap (X = x_j) = \emptyset \ si \ i \neq j \end{cases}$. On a alors $\sum_{i=1}^{6} P(X = x_i) = 1$

b) Variable aléatoire et loi de probabilité

Définition :

Soit Ω l'univers fini associé à une expérience aléatoire.
Une ***variable aléatoire réelle*** (définie sur Ω) est une application $X: \Omega \to \mathbb{R}^+$
Ainsi, à chaque issue ω, X fait correspondre un unique réel $X(\omega)$.

Remarque :

Ω étant fini, X ne prend donc qu'un nombre fini de valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

Notations :

Soit a un réel.
• $(X = a)$ est l'événement : « X prend la valeur a ». C'est l'ensemble des issues ω de l'expérience pour lesquelles $X(\omega) = a$. $(X = a)$ est donc une partie de Ω.
• $(X < a)$ est l'événement : « X prend des valeurs inférieures strictement à a ».
C'est l'ensemble des issues ω de l'expérience pour lesquelles $X(\omega) < a$.

c) Paramètres d'une variable aléatoire

Définition :

Soit P une probabilité sur un univers fini Ω, et $X: \Omega \to \mathbb{R}^+$ une variable aléatoire définie sur Ω prenant les valeurs : $x_1, x_2, \dots, x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ avec les probabilités des évènements élémentaires $\forall i \in [|1; n|], p_1, p_2, \dots, p_n$.

• ***L'espérance mathématique*** de X est : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$
• ***La variance*** de X est :$V(X) = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right]$ soit aussi $V(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - E(X)\right)^2 p_i$
• ***L'écart-type*** de X est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarque :

La variance est un nombre toujours positif car c'est la somme de nombre positif. L'écart-type a donc du sens puisqu'on doit prendre la racine carrée.

Formule de Kœnig :

Soit P une probabilité sur un univers fini Ω, et $X: \Omega \to \mathbb{R}^+$ une variable aléatoire définie sur Ω prenant les valeurs : $x_1, x_2, \dots, x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ avec les probabilités des évènements élémentaires $\forall i \in [|1; n|], p_1, p_2, \dots, p_n$.
Alors, on a : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 P(X = x_i) - E(X)^2$
On a aussi : : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right)^2$

Vocabulaire :

$\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 p_i$ aussi noté $E(X^2)$ est appelé le moment d'ordre 2. L'espérance mathématique est donc le moment d'ordre 1.

Remarque :

On utilise plus aisément cette formule pour calculer la variance. Il suffit en effet de rajouter des lignes dans la loi de probabilité comme le montre l'exemple ci-dessous.

Exemple :

On reprend l'exemple initial.

$(X = x_i)$	-10	- 4	-3	2	3	4	Total
$P(X = x_i) = p_i$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$
$x_i p_i$	$\frac{-10}{9}$	$\frac{-8}{9}$	$\frac{-6}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{4}{9}$	$E(X) = -\frac{4}{3}$
$x_i{}^2 p_i$	$\frac{100}{9}$	$\frac{32}{9}$	$\frac{18}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{18}{9}$	$\frac{16}{9}$	$E(X^2) = \frac{188}{9}$

• ***L'espérance mathématique de X*** :

Puisque $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, on peut écrire : $E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ ... + x_np_n$ soit aussi

$$E(X) = \frac{x_1p_1 + x_2p_2 + \ ... + x_np_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$$

$E(X)$ est ***la moyenne algébrique*** des $x_1, x_2, ..., x_n$, affectés des coefficients $p_1, p_2, ..., p_n$
Ici, $E(X)$ représente le gain algébrique moyen qu'on peut espérer à l'issue d'un tirage.

Remarques :

Si $E(X) < 0$, on dit que le jeu est défavorable au joueur.
Si $E(X) = 0$, on dit que le jeu est équitable.
Dans l'exemple, le jeu est défavorable au joueur et on peut espérer perdre en moyenne 1,33 €

• ***La variance et l'écart type de X :***

$V(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i{}^2 p_i - (\sum_{i=1}^{6} x_ip_i)^2 = \frac{188}{9} - \left(-\frac{12}{9}\right)^2$ soit en calculant $V(X) = \frac{172}{9}$

Interprétation :

$V(X) = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - E(X)\right)^2 p_i$. Puisque $\sum_{i=1}^{n} x_ip_i = 1$,on peut écrire la variance : $V(X) = \frac{\left(x_1 - E(X)\right)^2 p_1 + \left(x_2 - E(X)\right)^2 p_2 + \ ... + \left(x_n - E(X)\right)^2 p_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$

Or $\left(x_i - E(X)\right)^2$ représente le carré de ***l'écart*** de la valeur x_i de X à la valeur moyenne de X. Ainsi $V(X)$ est la moyenne algébrique des carrés des écarts des valeurs de X à l'espérance mathématique affectés des coefficients p_i. C'est donc un paramètre qui mesure ***la dispersion*** des valeurs de X par rapport à l'espérance mathématiques.

Propriété 2 :

Soit X une V.A.R définies sur un univers Ω et P une probabilité sur Ω.
Alors, quelque soient les nombres a et b réels, on a :

- $E(aX + b) = aE(X) + b$
- $V(aX + b) = V(aX) = a^2V(X)$

Remarque :

On appelle cela une transformation affine avec la variable $Y = aX + b$

Démonstration :

Soit X une variable aléatoire prenant n valeurs $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, de probabilités respectives $\forall i \in [|1; n|], p_1, p_2, ..., p_n$. Soit $Y = aX + b$. Alors l'ensemble des valeurs prises par Y est $\{ax_1 + b, ax_2 + b, ..., ax_n + b\}$

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n}(ax_i + b)p_i = \sum_{i=1}^{n} ax_ip_i + bp_i = a\sum_{i=1}^{n} x_ip_i + b\sum_{i=1}^{n} p_i = aE(X) + b$$

On dit que l'espérance est linéaire.
Si on applique la formule précédente à la variable aléatoire $Y = aX$, on a : $E(Y) = aE(X)$

Soit $V(Y) = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - E(Y)\right)^2 p_i$. On remplace alors dans la formule :

$$V(Y) = \sum_{i=1}^{n}\left(ax_i - aE(X)\right)^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} a^2 p_i\left(x_i - E(X)\right)^2 = a^2 \sum_{i=1}^{n} p_i\left(x_i - E(X)\right)^2 = a^2 V(X).$$

2) Somme de deux variables aléatoires

Exemple introductif :

On lance un dé jaune et un dé vert, équilibrés et non truqués, comportant chacun 6 faces numérotés de 1 à 6. On note X la variable aléatoire donnant le résultat du dé jaune et Y celle du dé vert. On note Z la variable aléatoire donnant la somme des résultats obtenus sur les deux dés. Intuitivement, on sent bien que $Z = X + Y$

> ***Définition :***
>
> Lorsque X et Y sont deux variables aléatoires, $X + Y$ est la variable aléatoire qui prend pour valeurs les sommes des valeurs possibles de X et de Y.

Exemple :

On tire au sort une adresse dans une ville. L'univers Ω est donc l'ensemble des adresses de cette ville. On considère les variables aléatoires A et I donnant respectivement le nombre de personnes mAjeures et le nombre de personnes mIneures.
$A + I$ est donc la variable aléatoire qui, à une adresse, associe le nombre de personnes mAjeures et mIneures y habitant. C'est donc le nombre total de personne.

Remarque :

Si on peut ajouter deux variables aléatoires, on peut en ajouter n. Pour rappel, lorsque X suit une loi binomiale de paramètre n et p, c'est en fait la somme de n variables identiques et indépendantes qui suivent chacune la même loi de Bernoulli de paramètre p.

> ***Propriété :***
>
> Lorsque X et Y sont deux variables aléatoires, on a : $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Exemple :

$X \leadsto \mathfrak{B}(200; 0{,}2)$ et $Y \leadsto \mathfrak{B}(100\,; 0{,}5)$, alors on peut déterminer l'espérance pour la variable aléatoire $Z = X + Y$. On a $E(Z) = E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
On a donc $E(X + Y) = 200 \times 0{,}5 + 100 \times 0{,}2$ soit donc $E(Z) = 90$

Remarque :

L'espérance mathématique est dite linéaire. La variance n'est pas linéaire.

3) Variables aléatoires indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur Ω avec :
$\Omega(X) = \{x_i, i \in [|1; n|]\}$ et $\Omega(Y) = \{y_j, j \in [|1; m|]\}$

> ***Définition :***
> X et Y sont indépendantes lorsque $\forall i \in [|1; n|]$ et, $\forall j \in [|1; m|]$, on a :
> $$P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j)$$

Remarque :

Dans la pratique, pour prouver que deux variables ne sont pas indépendantes, il suffit d'exhiber deux évènements qui contredisent l'égalité.

Exemple :

On lance deux dés bien équilibrés. On note S et D les deux variables aléatoires égales respectivement à la somme et au produit des deux chiffres obtenus par ces dés.

Montrons que ces deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes.
On considère comme univers Ω l'ensemble des 36 couples$(x_i; y_j)$ avec x_i et y_j dans $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et P la loi équirépartie sur Ω . On remarque que les évènements $(S = 2), (D = 1)$ et $(S = 2) \cap (D = 1)$ sont tous égaux à$\{(1; 1)\}$
On a par équiprobabilité : $P(S = 2) = P(D = 1) = P\big((S = 2) \cap (D = 1)\big) = \frac{1}{36}$
Or $P(S = 2) \times P(D = 1) = \frac{1}{36} \times \frac{1}{36}$. Donc $P(S = 2) \times P(D = 1) \neq: P\big((S = 2) \cap (D = 1)\big)$
Ainsi, les variables S et D ne sont pas indépendantes.

4) Variance de la somme de deux variables aléatoires

Propriété :

Lorsque X et Y sont deux variables ***aléatoires indépendantes***, on a :
$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

Remarque :

Si les variables aléatoires ne sont pas indépendantes, il se peut que $V(X + Y) \neq V(X) + V(Y)$

Exercice :

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes sur un même univers fini Ω.
La loi de probabilité de X est données ci-dessous. On donne aussi $E(Y) = 2{,}6$ et $V(Y) = 1{,}44$

$(X = x_i)$	0	2
$P(X = x_i)$	0,3	0,7

Calculer :

1) $E(X + Y)$ 2) $E(2Y)$ 3) $V(X + Y)$

Solution :

1) On a $E(X) = 0 \times 0{,}3 + 2 \times 0{,}7 = 1{,}4$
2) On a donc $E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 1{,}4 + 2{,}6$ soit $E(X + Y) = 4$
3) $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ car les deux variables sont supposées indépendantes.
   On doit calculer la variance avec la formule basique.
   $V(X) = (0 - 1{,}4)^2 \times 0{,}3 + (2 - 1{,}4)^2 \times 0{,}7 = 0{,}84$
   On a alors $V(X + Y) = 0{,}84 + 1{,}44$ soit $V(X + Y) = 2{,}28$

5) Somme de variables aléatoires identiques et indépendantes

a) Échantillon de taille n d'une loi de probabilité

Propriété :

Un échantillon de taille n d'une loi de probabilité est une liste $(X_1; X_2; X_3; \dots \dots; X_n)$ de n variables aléatoires identiques et indépendantes qui suivent cette loi

Exemple :

Jeanine prend un bus tous les jours de la semaine pour aller travailler. On admet que la variable X qui compte le nombre de retards du bus suit une loi binomiale $X \rightsquigarrow B(5; 0{,}2)$
Elle répète cette expérience 10 semaines consécutives. On construit alors un échantillon $(X_1; X_2; X_3; \dots \dots; X_{10})$ de taille 10 de cette loi de probabilité.

b) Somme d'un échantillon

Définition :

$(X_1; X_2; X_3; \dots \dots; X_n)$ est un échantillon de taille n de la loi de probabilité suivie par une variable aléatoire X.
La somme de cet échantillon est la variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

Exemple :

Soit $X \leadsto B(1;p)$, une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli.
Alors $S_n \leadsto B(n;p)$ est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Propriété :

S_n est la somme d'un échantillon de taille n de la loi de probabilité suivie par une variable aléatoire X.
On a alors : $E(S_n) = nE(X)$, $V(S_n) = nV(X)$ et $\sigma(S_n) = \sqrt{n}\sigma(X)$

Démonstration :

Pour l'espérance :

L'espérance est linéaire. Ainsi, $E(S_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ ... + E(X_n)$. Or, toutes les variables aléatoires suivent toutes la même loi X et on donc la même espérance.
$E(S_n) = E(X) + E(X) + \ ... + E(X)$. Et on a donc : $E(S_n) = nE(X)$

Pour la variance :

Les n variables aléatoires sont indépendantes. Ainsi, $V(S_n) = V(X_1) + V(X_2) + \ ... + V(X_n)$.
Or, toutes les variables aléatoires suivent toutes la même loi X et on donc la même variance.
$V(S_n) = V(X) + V(X) + \ ... + V(X)$. Et on a donc : $V(S_n) = nV(X)$

Pour l'écart-type :

L'écart-type est la racine carrée de la variance. On a donc $\sigma(S_n) = \sqrt{n}\sigma(X)$

c) Moyenne d'un échantillon

Définition :

$(X_1; X_2; X_3; \dots \dots; X_n)$ est un échantillon de taille n de la loi de probabilité suivie par une variable aléatoire X.
La moyenne de cet échantillon est la variable aléatoire $M_n = \frac{S_n}{n}$

On a alors les propriétés :

Propriété :

M_n est la moyenne d'un échantillon de taille n de la loi de probabilité suivie par une variable aléatoire X.
On a alors : $E(M_n) = E(X)$, $V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$ et $\sigma(M_n) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Exercice :

Tous les jours, Jean-Claude réussit à reconstituer le Rubik's Cube que lui ont offert ses petits-enfants. X est l'écart, en secondes, entre le temps qu'il réalise et son meilleur temps. La loi de probabilité de X est donnée ci-dessous.

a	0	1	2	10	20
$P(X = a)$	0,5	0,25	0,1	0,1	0,05

Déterminer l'espérance et l'écart-type de l'écart quotidien moyen sur une série de 30 jours.

Correction :

Les 30 jours sont indépendants les uns des autres donc ils constituent un échantillon noté $(X_1; X_2; X_3; \dots \dots; X_{30})$ de taille 30 de la loi de probabilité ci-dessus. La variable aléatoire M_{30} est la moyenne de cet échantillon.
A l'aide de la calculatrice, on obtient : $E(X) \approx 2{,}45$ et $\sigma(X) \approx 4{,}96$
On a donc $E(M_{30}) \approx 2{,}45$ et $\sigma(M_{30}) \approx 0{,}906$