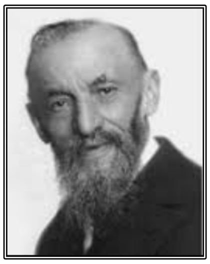
Le raisonnement par récurrence

Capacités attendues en fin de chapitre :

- Raisonner par récurrence pour établir une propriété d'une suite.

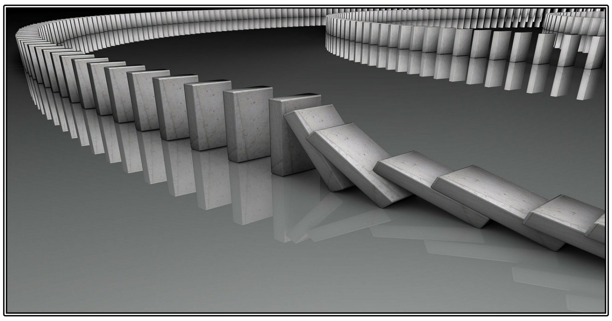
Le mathématicien du chapitre :



Giuseppe Peano (1858 –1932) est un mathématicien italien et un linguiste. Pionnier de l'approche des mathématiques, il développa l'axiomatisation des mathématiques. Le raisonnement par récurrence fut introduit dès le $18^{\text{ème}}$ siècle mais c'est en 1889, que Peano exprima l'axiome de récurrence. C'est pour lui les prémisses de son très ambitieux projet de formalisation des mathématiques.

1) *Notions intuitives*

Plusieurs notions permettent de mettre en évidence la notion de raisonnement par récurrence. La chute successive de dominos, comme le montre le schéma ci-dessous, est la plus claire car elle reprend les étapes du raisonnement par récurrence.



2) *Activité introductive*

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$

Cette suite est définie par ce qu'on appelle une relation de récurrence.
Cela signifie que, pour obtenir la valeur d'un terme, il faut connaître le terme précédent.
Il paraît plus simple d'obtenir une expression du terme général de la suite afin de connaître directement un terme. On appelle cela une formule explicite.
Pour se faire une idée et afin de poser ***une conjecture***, il faut calculer les premiers termes de la suite. A l'aide d'un petit programme Python, on obtient

```python
def recurrence(n):
  u = 0
  for i in range(n):
    u = 2*u+1
    print("u",i+1,"=",u)
```

```
> recurrence(6)
u 1 = 1
u 2 = 3
u 3 = 7
u 4 = 15
u 5 = 31
u 6 = 63
```

Afin d'émettre une conjecture, il est préférable d'écrire les termes en colonne. Nous pouvons donc émettre la conjecture suivante : $\forall n \in \mathbb{N}, P_n : u_n = 2^n - 1$.

Attention :

Une conjecture n'est pas une preuve : il faut maintenant la démontrer.
Supposons que cette propriété soit vraie au rang n, c'est à dire que $u_n = 2^n - 1$. On injecte alors l'hypothèse de récurrence dans l'expression. On aurait alors $u_{n+1} = 2(2^n - 1) + 1$ soit en développant, $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$ ce qui correspond à l'écriture de P_{n+1}
Autrement dit, si la propriété est vraie au rang n, alors elle est vraie au rang $n + 1$.
On dit que la ***propriété est héréditaire***.

Pour conclure, on a vu que la propriété était vraie aux rangs 1, 2, 3, 4, 5,6 (on dit que la ***propriété est initialisée***) et puisqu'elle est héréditaire, elle est aussi vraie aux rangs 7, 8 et ainsi de suite. Donc finalement, vraie pour tout n.

Voici donc notre premier ***raisonnement par récurrence***.

3) *Le principe de récurrence*

Axiome de récurrence :

Soit P_n une propriété dépendant de l'entier naturel n. On suppose que l'on a les deux assertions suivantes :
- P_0 est vraie (***Initialisation***)
- $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n vraie implique que P_{n+1} vraie. (***Hérédité***)

Alors P_{n+1} est vraie pour tout entier naturel n. (***Conclusion***)

Remarques :

- Il faut toujours vérifier l'initialisation. Il existe des propriétés héréditaires mais jamais initialisées.
- Une variante est possible. L'initialisation peut se faire à partir d'un certain rang.
- Il faut toujours écrire la propriété au rang $n+1$ afin de savoir ce qu'on souhaite prouver.
- Dans tous les cas il faut, soit construire en partant de la propriété au rang n, soit injecter l'hypothèse de récurrence dans une expression.

4) *Exemples*

La difficulté du raisonnement par récurrence est qu'il existe de nombreuses méthodes pour prouver une propriété. On ne peut pas s'appuyer sur la même démarche même si la trame reste la même. La majeure partie des méthodes sont dans la fiche d'exercice jointe. Voici quelques exemples basiques :

Exemple 1 :

Montrons par récurrence la propriété notée : $\forall n \in \mathbb{N}, P_n : 4^n - 1$ est un multiple de 3.

Solution :

Il faut d'abord être capable de traduire l'énoncé. La propriété est plus maniable si l'on écrit : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{Z}, 4^n - 1 = 3k$, notons que le k va changer pour chaque n.

(1) Initialisation :

Lorsque $n = 0$, alors $4^0 - 1 = 3 \times 0 = 0$ donc P_0 ***est vraie, la propriété est initialisée***.

(2) Hérédité :

Je suppose qu'il existe un entier n tel que $P_n : 4^n - 1$ soit vraie et je veux montrer que la propriété est vraie au rang $n+1$, soit $\exists k' \in \mathbb{Z}, 4^{n+1} - 1 = 3k'$ (?)
Dans l'hypothèse de récurrence, on peut isoler : $4^n = 3k + 1$
$4^{n+1} - 1 = 4^n \times 4 - 1 = (3k + 1) \times 4 - 1$
On développe et on factorise par 3 : $4^{n+1} - 1 = 3(4k + 1)$. On pose alors $k' = (4k + 1)$
Ainsi, $4^{n+1} - 1 = 3k'$. Ainsi P_{n+1} ***est vraie, la propriété est héréditaire***.

(3) Conclusion

$\forall n \in \mathbb{N}, P_n : 4^n - 1$ est un multiple de 3

Remarque :

Cette première récurrence arithmétique est difficile. L'écriture de la propriété n'est pas aisée. En fonction des exercices, la difficulté peut se situer à différents niveaux : l'écriture de la propriété, l'initialisation ou l'hérédité. Il est indispensable d'écrire l'expression de P_{n+1} afin de savoir si on a réussi à prouver ce que l'on souhaitait.

<u>Exemple 2 :</u>

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \end{cases}$

Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, P_n : u_n = \frac{n}{n+1}$

<u>Solution :</u>

<u>(1) Initialisation :</u>

Lorsque $n = 0$, alors $\frac{0}{0+1} = 0$ donc P_0 ***<u>est vraie, la propriété est initialisée</u>***.

<u>(2) Hérédité :</u>

Je suppose qu'il existe un entier n tel que P_n soit vraie et je veux montrer que la propriété est vraie au rang $n+1$ soit $P_{n+1} : u_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$ (?)

Je sais que :$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ On injecte l'hypothèse de récurrence

$u_{n+1} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ On met alors au même dénominateur : $u_{n+1} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}$

On factorise alors à l'aide d'une identité remarquable $u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}$

Ainsi, $u_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$ D'où P_{n+1} ***<u>est vraie, la propriété est héréditaire</u>***.

<u>(3) Conclusion</u>

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n}{n+1}$$

5) ***<u>L'inégalité de Bernoulli</u>***

<u>Propriété :</u>
Soit a un réel positif. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geq 1 + na$

<u>Remarque :</u>

La récurrence porte sur n. Le réel a est ici fixé.

<u>Correction :</u>

Montrons par récurrence la propriété notée : $\forall n \in \mathbb{N}, P_n : (1+a)^n \geq 1 + na$

<u>(1) Initialisation :</u>

$(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$, donc $(1+a)^0 = 1 + 0 \cdot a$ P_0 ***<u>est vraie, la propriété est initialisée</u>***.

<u>(2) Hérédité :</u>

Je suppose qu'il existe un entier n tel que P_n soit vraie et je veux montrer que la propriété est vraie au rang $n+1$ soit $P_{n+1} : (1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$ (?)
Pour rappel, $(1+a)^{n+1} = (1+a)^n \times (1+a)$

Puisque $(1+a)^n \geq 1 + na$ alors, en multipliant les deux membres de cette inégalité par le réel positif. $(1+a)$: $(1+a)^n \times (1+a) \geq (1+na)(1+a)$
Soit en développant : $(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a + na^2$

n et a étant des nombres positifs, on peut minorer : $1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a$.
D'où P_{n+1} ***<u>est vraie, la propriété est héréditaire</u>***.

<u>(3) Conclusion</u>

$\forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geq 1 + na$

6) *D'autres types de raisonnements*

- ***Le raisonnement par disjonction de cas***

Ce raisonnement consiste à examiner tous les cas possibles en prouvant qu'on arrive toujours à la même conclusion. Assez fréquemment, cela consiste à différencier le cas où n est pair du cas où n est impair.

Exemple :

Montrer que, quel que soit $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 - n$, est pair.

Correction :

En factorisant l'expression, on remarque : $n^2 - n = n(n-1)$
Si n est pair, alors $n - 1$ est impair et le produit $n(n-1)$ est pair.
Si $n - 1$ est pair, alors n est impair et le produit $n(n-1)$ est pair
Donc par disjonction de cas, $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 - n$ est pair

- ***Le raisonnement par l'absurde***

Il consiste à supposer vraie une proposition, et à montrer que, dans ces conditions, on arrive à une absurdité.

Exemple :

Montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Correction :

Rappel : un nombre rationnel s'écrit sous la forme $\frac{p}{q}$ avec p et q deux entiers de $\mathbb{Z}$.

On suppose donc qu'il existe deux entiers p et q tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. On choisit ces deux entiers de telle sorte que la fraction soit irréductible. On a alors les deux égalités suivantes :
$2 = \frac{p^2}{q^2}$ soit alors $p^2 = 2q^2$
On peut donc affirmer que p^2 est pair et par conséquent que p est aussi pair. On peut donc écrire $p = 2n$ où n est un entier.
En remplaçant alors dans l'égalité initiale, $(2n)^2 = 2q^2$ soit $4n^2 = 2q^2$ soit enfin : $2n^2 = q^2$
Ce qui nous permet d'affirmer que q^2, et donc q, sont des entiers pairs.
On peut donc affirmer que $\frac{p}{q}$ n'est pas une fraction irréductible ce qui conduit à une absurdité puisque p et q ont été choisis dans ce but donc $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel

- ***Le raisonnement par contre-exemple***

Lorsqu'on sait qu'une proposition n'est pas valable, le plus souvent, il suffit d'exhiber un contre-exemple qui mettra en défaut la proposition. Cette recherche d'un contre-exemple relève plus du flair mathématique que d'une démarche scientifique précise. Il faut « sentir » ce qui va coincer.

Exemple :

Prouver que la propriété suivante n'est pas vraie : $\forall x \in \mathbb{R}, (x+1)^2 = x^2 + 1$.

Correction :

Remarquons que cette égalité est vraie pour $x = 0$ mais elle est fausse si $x = 1$ donc la propriété est fausse.

Attention :

Il suffit de trouver ***un contre-exemple*** pour réfuter une proposition mais il ne suffit pas de montrer que la proposition est vérifiée avec un nombre pour affirmer qu'elle est toujours vraie.