Produit scalaire dans le plan

Capacités attendues en fin de chapitre :

- Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, pour calculer un angle, une longueur dans le plan ou dans l'espace.
- Calculer le produit scalaire de deux vecteurs, en utilisant la projection orthogonale, à l'aide des coordonnées, à l'aide des normes et d'un angle, à l'aide de normes.
- Utiliser le produit scalaire pour résoudre un problème géométrique.

Le mathématicien du chapitre :

William Hamilton (1805-1865) est un mathématicien irlandais qui a étudié de nombreux domaines mathématiques. Il introduit notamment les vecteurs dans les problèmes mécaniques et géométriques. Il fut le premier à utiliser le terme de vecteur (1846). En 1853, Il développe le calcul vectoriel et introduit le premier la notion de scalaire $x = \frac{AB}{AC}$lorsque les points A, B et C forment des vecteurs colinéaires.

1) Définitions et cas particuliers

a) Définition du produit scalaire de deux vecteurs

Définition :

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ et trois points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$
La norme du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est le nombre réel positif défini par $\|\vec{u}\| = AB$
Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$ est le nombre réel défini par :

$$\begin{cases} \vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\vec{u},\vec{v})\ si\ \vec{u} \neq \vec{0}\ et\ \vec{v} \neq \vec{0} \\ \vec{u}.\vec{v} = 0, si\ \vec{u} = \vec{0}\ ou\ \vec{v} = \vec{0} \end{cases}$$

Remarques :

- Avec les points définis ci-dessus, on a aussi : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times cos\left(\widehat{BAC}\right)$
- Le produit scalaire est un indicateur numérique qui donne la position de deux vecteurs. Le signe du produit scalaire provient du signe du cosinus de l'angle orienté $\left(\widehat{BAC}\right)$

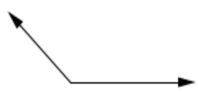
$\vec{u}.\vec{v} > 0$

Angle aigu

$\vec{u}.\vec{v} = 0$

Angle droit

$\vec{u}.\vec{v} < 0$



Angle obtus

Exemple :

Soient A, B et C trois points du plan tels que : $AB = 7$ et $AC = 8$ et $\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$

On a alors : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 7 \times 8 \times cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ soit donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -28$

b) Quelques cas particuliers

- ***Vecteurs colinéaires***

Propriété :

Soient deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ colinéaires
Si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ ont le même sens, alors $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
Si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont de sens contraire, alors $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

Remarque :

Le signe moins provient naturellement du cosinus.

• ***Carré scalaire***

Propriété et définition :

Soient un vecteur $\vec{u}$
Le carré scalaire de $\vec{u}$, noté $\vec{u}^2$ est le nombre réel défini par : $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u}$
On peut noter $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

• ***Vecteurs orthogonaux***

Définition :

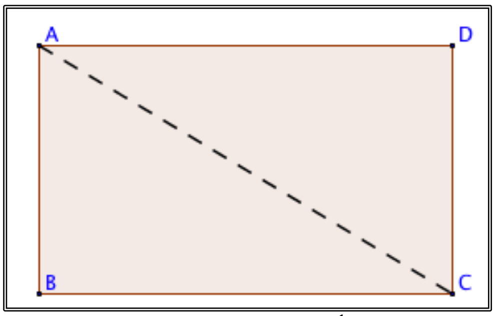
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$

Remarque :

Trois points A, B et C forment un triangle rectangle si et seulement si deux les vecteurs qu'ils forment sont orthogonaux.

Exemple :

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = \sqrt{3}$ et $BC = 1$ et $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{2}\,(2\pi)$
Donner les valeurs des produits scalaires ci-dessous.



$\overrightarrow{AC}^2 = AB^2 + BC^2 = 4$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} = \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB} = -1 \times 1 = -1$

$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC} = 0$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \sqrt{3} \times 2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3$

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 2 \times 1 \times \dfrac{1}{2} = 1$

Exercice :

On donne $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -6\sqrt{3}$ ainsi que $AB = 3$ et $AC = 4$. Déterminer $\widehat{BAC}$.

Solution :

On écrit la formule $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times cos\widehat{BAC}$ soit $-6\sqrt{3} = 3 \times 4 \times cos(\widehat{BAC})$

On a donc $cos(\widehat{BAC}) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ et donc $\widehat{BAC} = \frac{5\pi}{6}\,(2\pi)$

2) Propriétés du produit scalaire

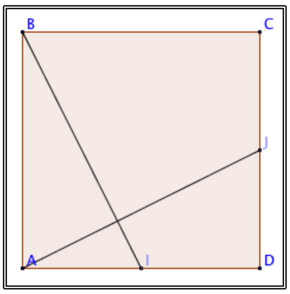
a) Propriétés algébriques

Propriété :

Soient $\vec{u}$,$\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et soit k un nombre réel. On a alors :

$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$	$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
$\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$	$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
$\vec{u}.(k\vec{v}) = (k\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v})$	$(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Exemple :



$ABCD$ est un carré, I est le milieu de $[AD]$et J le milieu de $[CD]$
Calculer alors $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BI}$

Solution :

On évalue le produit scalaire :

$\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BI} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ}).(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI})$

$\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{AI}$

$\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BI} = 0 + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{BA} + 0$

$\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BI} = 0 + AB \times AI - DJ \times BA$

$\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BI} = 0$ On peut donc conclure que les droites(AJ) et (BI) sont perpendiculaires

b) *Autres expressions du produit scalaire*

○*Expression analytique du produit scalaire*

Dans cette partie, le plan sera rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$

Propriété :

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs. On a alors :

$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$ $\qquad\qquad$ $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$

Démonstration :

Avec le repère orthonormé, on a : $\|\vec{\imath}\| = 1$ et $\|\vec{\jmath}\| = 1$ avec $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = 0$ et $\vec{\jmath}.\vec{\imath} = 0$
Ainsi $\vec{u}.\vec{v} = (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}).(x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath})$. On développe alors l'expression à l'aide des propriétés
$\vec{u}.\vec{v} = xx'\vec{\imath}.\vec{\imath} + xy'\vec{\imath}.\vec{\jmath} + x'y\vec{\jmath}.\vec{\imath} + yy'\vec{\jmath}.\vec{\jmath}$ soit donc $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$

Application :

On donne les points $A(3\,;7)$, $B(5\,;12)$, $C(6\,;4)$, $D(1\,;6)$.
Que peut-on dire des droites (AB) et (CD).

Solution :

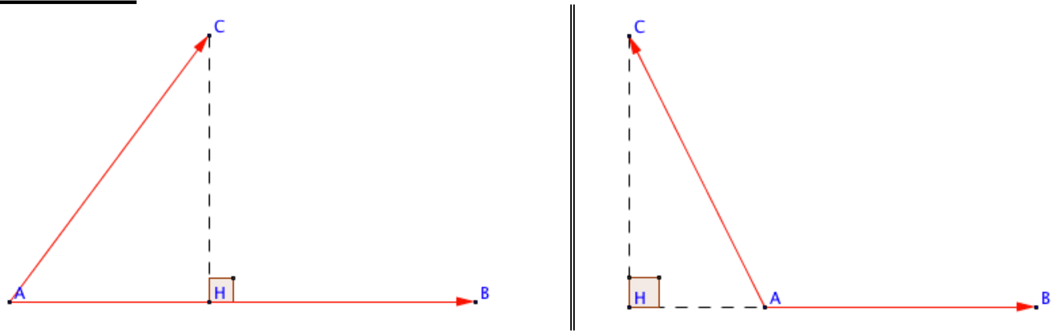
On évalue les coordonnées des deux vecteurs : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$
On évalue $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 2 \times (-5) + 5 \times 2$ soit donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux ; les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

○*Projection orthogonale*

Définition :

Soient A, B et C trois points (A et B distincts). On appelle projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) le point H d'intersection entre (AB)et la perpendiculaire à (AB)passant par C.

Illustration :



Propriété :

Si H est le projeté orthogonale de C sur (AB) , alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$

Démonstration :

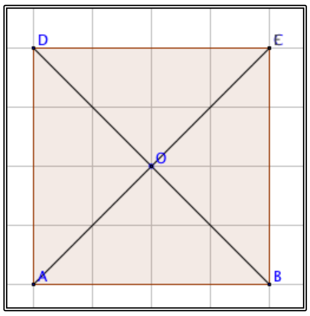
On utilise la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}\right)$
Soit alors en développant $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC}$
Pour conclure $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$
Deux cas se présentent alors :

Si H est entre A et B, alors on a :	Si H est à l'extérieur de $[AB]$, alors on a :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$	$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$

Remarque :

Le signe négatif correspond à $cos(\pi)$

Exemple :



Donner de tête les produits scalaires suivants sachant que $ABCD$ est un carré de côté 4.

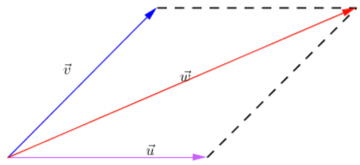
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 16$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO} = 8$

$\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AC} = 16$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{DC} = -16$

○***Identité du parallélogramme***



Soit un parallélogramme formé par deux vecteurs :
On a alors la propriété fondamentale :

Propriété :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, On a : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

Soient A, B et C trois points du plan, On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$

Démonstration :

La première propriété s'obtient en évaluant séparément les deux membres de l'égalité à l'aide de l'expression du produit scalaire.
La seconde expression provient d'un choix judicieux des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Si on applique cette formule avec les vecteurs $\vec{u}$ et $-\vec{v}$, on obtient :
$\vec{u}.(-\vec{v}) = \frac{1}{2}(\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$ soit donc $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$
On applique alors avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

Exemple :

Soit un triangle ABC tel que $AB = 4$, $AC = 8{,}5$ et $CB = 6$. Déterminer alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Solution :

On applique l'identité du parallélogramme au demi-parallélogramme communément appelé triangle…
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$ soit donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 26{,}125$

3) Applications du produit scalaire

○***Théorème de la Médiane***

Théorème :

Soient A, B et M trois points du plan et I le milieu de $[AB]$. On a alors :

$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$

Démonstration :

On évalue donc $MA^2 + MB^2$

$MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2$

$MA^2 + MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$

$MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2$

$MA^2 + MB^2 = 2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + 2\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2\right)$

$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$ car $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

Remarque :

Ce théorème fait intervenir la longueur de la médiane issue de A d'où son nom.

○ *Théorème d'Al-Kashi*

Théorème :

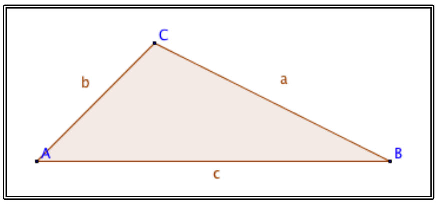
Soient ABC un triangle quelconque.
$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \times c \times cos(\hat{A})$

Remarque :

- On peut obtenir sans problème la même égalité pour b ou c en procédant à une permutation circulaire sur les lettres a, b et c.
- Ce théorème porte souvent le nom de théorème de Pythagore généralisé. Si l'angle est droit, le cosinus est nul et on retrouve l'égalité de quatrième.

Démonstration :

$a^2 = BC^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2$
$a^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$
$a^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2$
$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \times c \times cos(\hat{A})$



Exemples :

1) Soit ABC un triangle tel que $AB = 2$, $AC = 4$ et $\widehat{BAC} = \frac{3\pi}{4}$. Déterminer CB
2) Soit EFG un triangle tel que $EF = 2$, $FG = 7$ et $EG = 6$. Déterminer $\widehat{EGF}$

Solution :

On écrit la formule d'Al-Kashi en cherchant soit une longueur, soit un angle :

1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2b \times c \times cos(\hat{A})$ devient $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times cos(\widehat{BAC})$
$BC^2 = 4 + 16 + 4 \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$ soit donc $BC = \sqrt{20 + 8\sqrt{2}}$
2) $g^2 = e^2 + f^2 - 2e \times f \times cos(\hat{G})$ devient $EF^2 = FG^2 + EG^2 - 2FG \times EG \times cos(\widehat{EGF})$
$4 = 36 + 49 - 12 \times 7 \times cos(\widehat{EGF})$ soit $cos(\widehat{EGF}) = \frac{81}{84}$ soit $\widehat{EGF} \approx 15{,}36°$

4) Équation cartésienne d'un cercle

Il y a deux façons de définir un cercle :

- Avec le centre et le rayon.
- Avec deux points diamétralement opposés.

Définition :

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre $A(x_0 \,;\, y_0)$ et de rayon r.
$M(x \,;\, y) \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$
On appelle cette équation une équation cartésienne du cercle $(\mathcal{C})$

Démonstration :

Il suffit de calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$

$\|\overrightarrow{AM}\|^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ soit donc $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

Exercice :

1) Soit le point $A(3 \,;\, -5)$ et $r = 4$. Donner l'équation cartésienne du cercle de centre A et de rayon r.
2) On donne l'équation : $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$. Montrer qu'il s'agit d'un cercle dont on donnera les caractéristiques.

Solution :

1) Il s'agit d'une application directe de la formule. Attention quand même aux signes dans les parenthèses : $M(x\,;\,y) \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+5)^2 = 16$
   On peut développer l'expression $M(x\,;\,y) \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x + 10y + 18 = 0$
2) On utilise ici une technique bien connue : la forme canonique.
   $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$
   On reconnaît l'équation d'un cercle de centre $A(4\,;\,-3)$ et de rayon $r = 5$

Définition :

Soient A et B deux points distincts.
L'ensemble des points $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$

Démonstration

Il s'agit de la propriété de 4ème écrite avec le nouvel outil.

Exemples :

1) On donne les points $A(2\,;\,7)$ et $B(-4\,;\,9)$. Ecrire l'équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$. Retrouver alors son centre et son rayon.
2) On donne l'équation $(x-3)(x+7) + (y+5)(y-1) = 0$. Retrouver ses caractéristiques.

Solution :

1) On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-7 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x+4 \\ y-9 \end{pmatrix}$
   $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+4) + (y-7)(y-9) = 0$
   soit $M(x\,;\,y) \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 16y + 55 = 0$
   On utilise la forme canonique : $M(x\,;\,y) \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-8)^2 = 10$
   Le centre est $\Omega(-1\,;\,8)$ et $r = \sqrt{10}$
2) $(x-3)(x+7) + (y+5)(y-1) = 0$
   Deux réponses sont possibles :

- Si on pose $A(3\,;\,-5)$ et $B(-7\,;\,1)$, on obtient le cercle de diamètre $[AB]$ avec pour centre $\Omega(-2\,;\,-2)$ et pour rayon $r = \frac{AB}{2}$ soit $r = \sqrt{34}$
- Si on pose $C(3\,;\,1)$ et $D(-7\,;\,-5)$, on obtient le cercle de diamètre $[CD]$ avec pour centre $\Omega(-2\,;\,-2)$ et pour rayon $r = \frac{CD}{2}$ soit $r = \sqrt{34}$

Ce qui prouve l'unicité de l'ensemble de points.