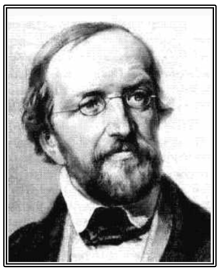
Problèmes du premier degré

Capacités attendues en fin de chapitre :

- Interprétation du coefficient directeur comme taux d'accroissement.
- Relier sens de variation, signe et droite représentative d'une fonction affine.
- Résoudre une inéquation du premier degré.
- Résoudre une inéquation quotient, une inéquation produit à l'aide d'un tableau de signe.

Le mathématicien du chapitre :

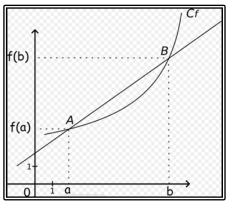
Johann Peter Dirichlet (1805-1859) est un mathématicien allemand qui fut très prolifique. Il travailla sur la théorie des nombres, ou encore les séries de Fourrier. On lui attribue la définition formelle d'une fonction (à tout *x* fini correspond un seul *y* fini). Une fonction (étudiée dans le supérieur) porte même son nom. Il travailla également en physique mathématique dans les domaines de mécanique des fluides et sur l'énergie potentielle.



1) *Taux d'accroissement d'une fonction*

Définition :

Soit une fonction *f* définie sur intervalle *I*.
Pour tous nombres réels *a* et *b* distincts dans *I*, on appelle taux d'accroissement de *f* entre *a* et *b* le quotient : $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Remarque :

Ce nombre, fréquemment noté *m* dépend des valeurs de *a* et de *b,* sauf si l'accroissement est constant. Une lecture graphique de *m* sera proposée dans le cadre des fonctions affines.

2) *Les fonctions affines*

a) Définition

Gabriel Fahrenheit est un physicien allemand du 18ème siècle. Il a donné son nom à la première échelle de température en 1709. Son unité, le degré Fahrenheit, est encore utilisé aujourd'hui en Angleterre et en Amériques du Nord. L'échelle de température la plus répandue est celle d'Anders Celsius (astronome et physicien suédois du 18ème siècle).
Les deux unités sont liées par une relation de la forme $T_F = mT_C + p$ où T_C représente la température et T_F la température en Fahrenheit.
Pour la culture, lorsque Fahrenheit a élaboré son échelle de température, il a utilisé un point haut (la température du sang de cheval) et un point bas (la température la plus basse dans la ville de Dantzig durant l'hiver 1708-1709).

Définition :

Une fonction affine *f* est une fonction définie pour tout réel *x* par : $f(x) = ax + b$
Où *a* et b sont des réels fixés.

Remarque :

Le taux d'accroissement d'une fonction affine est constant.

Cas particulier :

- Si $b = 0$, la relation devient $f(x) = ax$ est la fonction est appelée fonction linéaire.
- Si $a = 0$, la relation devient $f(x) = b$ est la fonction est appelée fonction constante.

Exemples :

Parmi les fonctions données ci-dessous, définies sur $\mathbb{R}$, lesquelles sont affines ?

- $f(x) = 3x + 5$
- $f(x) = -5x + \pi$
- $f(x) = -x^2 + 7$
- $f(x) = -(x-5)^2 + x^2 + 2$

b) Déterminer une fonction affine par le calcul

Comment Fahrenheit a-t-il déterminé son échelle et quel lien y-a-t-il avec Celsius ?
L'échelle Fahrenheit est une échelle de température thermodynamique où le point de congélation de l'eau correspond à 32 °F et le point d'ébullition de l'eau à 212 °F.
Soit la fonction $f(x) = ax + b$ où x représente la température en Celsius.
Avec l'énoncé, on a : $f(0) = 32$ et $f(100) = 212$
On détermine le taux d'accroissement : $a = \frac{f(100)-f(0)}{100-0}$ soit $a = 1{,}8$
En utilisant $f(0) = 32$, on obtient $f(x) = 1{,}8x + 32$
Cette fonction donne la température en Fahrenheit en fonction de la température en Celsius.
On aurait pu trouver une relation « dans l'autre sens » en inversant les images et les antécédents.

> ***Propriété :***
>
> Soient f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ et deux nombres x_1 et x_2 ;
> On a alors a= $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ et b= $f(x_1) - ax_1$

Remarque :

- On peut inverser les rôles de x_1 et de x_2 à condition de conserver l'ordre en haut et en bas.
- a et b peuvent être des nombres réels quelconques.

Exercice :

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ avec $f(5) = 11$ et $f(7) = 17$
Déterminer l'expression de f.

Solution :

On détermine la valeur de m par : $a = \frac{f(7)-f(5)}{7-5}$ soit $a = \frac{17-11}{2}$ soit donc $a = 3$
On a donc $f(x) = 3x + b$ soit en remplaçant par une des valeurs données : $17 = 3 \times 7 + b$
On obtient $b = -4$ et on a : $f(x) = 3x - 4$

Algorithmique :

On souhaite réaliser un programme qui donne l'expression d'une fonction affine connaissant les images de deux nombres.

```python
from math import *
x = float(input("valeur de x1 ="))
y = float(input("valeur de y1 ="))
u = float(input("valeur de x2 ="))
v = float(input("valeur de y2 ="))
m = (v-y)/(u-x)
p = y - m*x
print("coefficient directeur =",m)
print("ordonnée à l'origine =",p)
```

```
valeur de x1 =5
valeur de y1 =11
valeur de x2 =7
valeur de y2 =17
coefficient directeur = 3.0
ordonnée à l'origine = -4.0
```

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
ÉDIT MENU: [alpha] [f5]
PROGRAM:AFFINE
:Input "X1=",X
:Input "Y1=",Y
:Input "X2=",U
:Input "Y2=",V
:(V-Y)/(U-X)→M
:Y-MX→P
:Disp "M=",M▸Frac
:Disp "P=",P▸Frac
```

c) Représentation graphique

Propriété :

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite. Son équation (appelée équation réduite d'une droite) est de la forme $(d): y = mx + p$

Remarques :

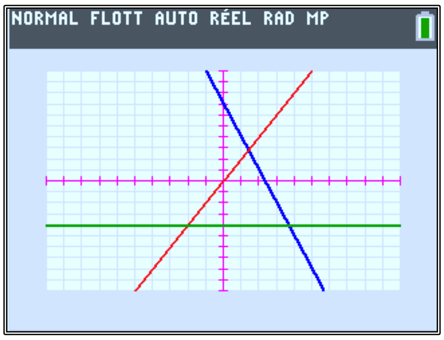
- Lorsque la fonction est linéaire, elle est représentée par une droite qui passe par l'origine et traduit donc une situation de proportionnalité.
- Lorsque la fonction est constante, elle est représentée par une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Vocabulaire :

- m est appelé le coefficient directeur (ou pente) de la représentation graphique.
- p est appelé l'ordonnée à l'origine de la droite

Remarque :

Une fonction linéaire a donc une ordonnée à l'origine nulle, une fonction constante a une pente nulle.



Remarque :

Pour tracer une droite, on a besoin d'une règle mais surtout de deux points. Une autre méthode consiste à compter les carreaux mais elle ne s'applique que dans un ROND.

d) Sens de variation

Propriété :

- Si $a > 0$, la fonction $f: x \mapsto ax + b$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- Si $a < 0$, la fonction $f: x \mapsto ax + b$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :

Soient x_1 et x_2 deux nombres de $\mathbb{R}$ tels que $x_1 < x_2$ et $f(x) = ax + b$
On va évaluer la différence $f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - (ax_1 + b)$
Soit en simplifiant $f(x_2) - f(x_1) = ax_2 - ax_1$
Soit en factorisant l'expression $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$
Puisque $x_1 < x_2$, on a que $x_2 - x_1 > 0$
En fonction du signe de a, $f(x_2) - f(x_1)$ est positif ou négatif ce qui correspond à la propriété.

e) Tableau de signe

L'expression $ax + b$ intervient dans de nombreux exercices au lycée.
Évidemment, si $a = 0$, le signe de cette expression est le même que celui de b et cela n'a aucun intérêt.
Si a n'est pas nul, on a alors :

Cas ou $a < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax + b$		$+$	0	$-$	

Cas ou $a > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax + b$		$-$	0	$+$	

Méthode :

Dans la pratique, on retiendra qu'une expression $ax + b$ est du signe de a à droite du 0.

Exemple :

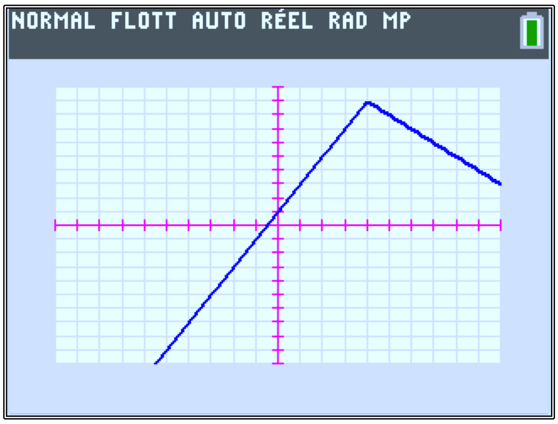
Donner le tableau de signe de l'expression : $-5x + 15$
Pour cela, on détermine mentalement le nombre qui annule l'expression puis on construit le tableau de signe en appliquant le cours.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$-5x+15$		$+$	0	$-$	

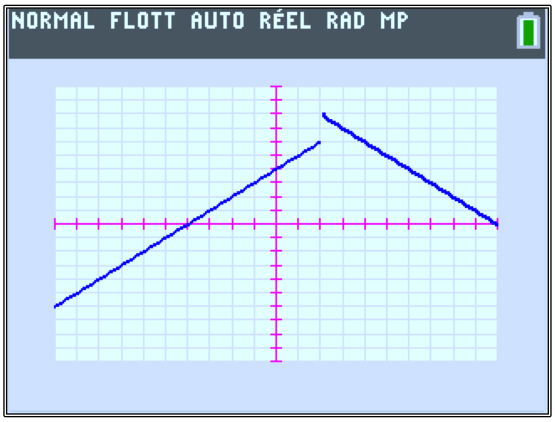
3) *Les fonctions affines par morceaux*

Certaines fonctions sont constituées de morceaux de fonctions affines. Ce sont les fonctions affines par morceaux. On donne ci-dessous deux exemples de fonctions de ce type.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, si\ x < 4 \\ -x + 13, si\ x \geq 4 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} x + 4, si\ x < 2 \\ -x + 10, si\ x \geq 2 \end{cases}$$



Visuellement, il est clair que ces deux fonctions ont une différence essentielle. Il n'est pas nécessaire de lever le crayon pour tracer la première. Cette notion, la continuité, est fondamentale au lycée dans l'étude des fonctions. Elle sera traitée en classe de terminale.

4) *Résoudre une inéquation-produit*

a) *Déterminer le signe d'une expression.*

Assez fréquemment, on est amené à rechercher le signe d'une expression $A(x)$.
Pour cela il convient d'avoir cette expression sous forme factorisée.

Rappel :

- Le produit (ou le quotient) de deux nombres de même signe est toujours positif.
- Le produit (ou le quotient) de deux nombres de signe contraire est toujours négatif.

b) *Résoudre une inéquation-produit*

Pour résoudre une inéquation, en seconde, il faut se ramener à une expression factorisée avec un second membre nul ; ce qui finalement revient à étudier le signe d'une expression.

Méthode :

- On transpose toute l'expression dans le premier membre et on la factorise.
- Si on ne trouve pas de factorisation, on développe (ça devrait se simplifier…)
- On étudie le signe de chaque facteur.
- On regroupe toutes les informations dans un tableau de signe et on conclut par $S =$

Exemple :

Résoudre l'inéquation suivante : $(5x + 1)(28 - 10x) > 0$

On étudie le signe des deux facteurs en déterminant d'abord les nombres qui les annulent. On complète ensuite un tableau de signe en mettant autant de lignes que de facteurs.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{5}$		$2{,}8$	$+\infty$
$(5x + 1)$	$-$	0	$+$		$+$
$(28 - 10x)$	$+$		$+$	0	$-$
$(5x + 1)(28 - 10x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

On se rappelle le cours sur les intervalles et on peut alors conclure : $S = \left]-\frac{1}{5}\,; 2{,}8\right[$

Exercices :

Résoudre les inéquations suivantes en se ramenant à une inéquation-produit.

- $7x + 9 \geq (10 - 4x)(7x + 9)$
- $(7x + 9)(-9 + 4x) \geq 0$
- $x^2 - 10x + 25 \leq (3x + 12)(x - 5)$
- $(x - 5)^2 \leq (3x + 12)(x - 5)$

5) *Résoudre une inéquation-quotient*

Méthode :

- On cherche toujours en premier les potentielles valeurs interdites avant d'intervenir sur l'inéquation.
- On transpose toute l'expression dans le premier membre et on la met au même dénominateur.
- On factorise le numérateur puis on étudie le signe de chaque facteur.
- On regroupe toutes les informations dans un tableau de signe et on conclut par S=

Remarque :

Il est possible qu'une équation quotient n'ai pas de valeur interdite bien qu'elle présente un dénominateur. On représente les valeurs interdites dans le tableau de signe à l'aide d'une double barre verticale

Exemple :

Résoudre l'inéquation suivante : $\frac{1-3x}{8x-16} \leq 0$

On recherche les valeurs interdites. Ici le facteur $8x - 16$ s'annule pour la valeur 2

On étudie ensuite le signe des deux expressions : $8x - 16$ et $1 - 3x$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		2	$+\infty$
$8x - 16$	$-$		$-$	0	$+$
$1 - 3x$	$+$	0	$-$		$-$
$\frac{1 - 3x}{8x - 16}$	$-$	0	$+$	‖	$-$

On peut alors conclure : $S = \left]-\infty\,; \frac{1}{3}\right] \cup \left]2\,; +\infty\right[$

Remarque :

Parfois, il faut transformer l'expression afin de se ramener à une inéquation produit ou quotient.