Probabilités conditionnelles

Capacités attendues en fin de chapitre :

- Construire un arbre pondéré ou un tableau en lien avec une situation donnée.
- Utiliser un arbre ou un tableau pour calculer une probabilité
- Calculer les probabilités conditionnelles en utilisant un tableau à double entrée.
- Utiliser la formule des probabilités totales.
- Distinguer $P_A(B)$ et $P_B(A)$
- Représenter une répétition de deux épreuves indépendantes.

Le mathématicien du chapitre :

Pierre-Simon de Laplace (1749-1827), mathématicien et homme politique français. C'est l'un des principaux mathématiciens de la période Napoléonienne. Il redécouvre en 1774 le théorème de Bayes, aussi appelé formule des probabilités des causes.

1) *Différentes modélisations pour décrire une situation*

a) *Le tableau à double entrée*

Méthode :

On utilise un tableau lorsqu'il n'y a pas de notion d'ordre chronologique et que plusieurs critères sont croisés. Par exemple, modes de paiement et montant des achats

Exercice :

Les 800 élèves d'un lycée possèdent une montre, soit du type M_1 soit du type M_2.
- Il y a 70% de montres de type M_1.
- La moitié des montres de type M_1 a un bracelet en cuir.
- 16,25% des montres de type M_1 ont un bracelet métallique.
- Parmi les montres de type M_2, il y a trois fois plus de montres à bracelet en tissu que de montres à bracelet métallique.
- Il n'existe pas de montres de type M_2 avec un bracelet en cuir.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant :

	Cuir	Métal	Tissu	Total
M_1	280	91	189	560
M_2	0	60	180	240
Total	280	151	369	800

2. Parmi l'ensemble de toutes les montres quel est le pourcentage des montres de type M_2 à bracelet en tissu ? $\frac{180}{800} \times 100 = 22{,}5\%$
3. Parmi les montres de type M_2, quel est le pourcentage de celles qui ont un bracelet métallique ? Il y a un quart de ces montres qui ont un bracelet métallique.

Dans les questions suivantes, les probabilités seront données à 10^{-3} près.
4. On choisit un élève au hasard parmi les 800 élèves du lycée.
Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
A « la montre de l'élève a un bracelet métallique ». $P(A) = \frac{151}{800} \approx 0{,}189$
B « la montre de l'élève est de type M_2 ». $P(B) = \frac{240}{800} \approx 0{,}3$
5. Définir par une phrase les évènements $A \cap B$ et $A \cup B$ puis calculer leur probabilité.
$A \cap B$: La montre est de type M_2 et a un bracelet métallique : $P(A \cap B) = \frac{60}{800} \approx 0{,}075$
$A \cup B$: La montre est de type M_2 ou a un bracelet métallique : $P(A \cup B) = \frac{331}{800} \approx 0{,}414$

6. On choisit au hasard un élève ayant une montre de type M_1. Quelle est la probabilité de l'évènement C « la montre de l'élève a un bracelet en tissu » ? Il faut être vigilant car l'univers change. On ne s'intéresse qu'aux montres M_1. Donc $P(C) = \frac{189}{560} \approx 0{,}338$

b) Le diagramme de Venn

Méthode :

On utilise parfois un diagramme de Venn pour déterminer les effectifs de chaque catégorie. La construction s'effectue alors par soustraction.

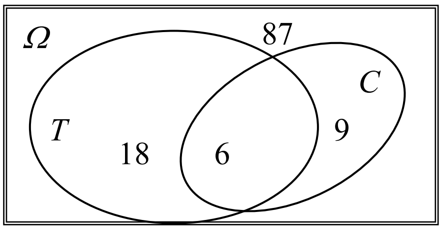
Exemple :

Dans un centre de vacances accueillant 120 personnes, on sait que 24 pratiquent le tennis et 15 du canoë. Six personnes pratiquent à la fois tennis et canoë. Combien de personnes ne pratiquent aucun des deux sports ?

Solution :

On note T l'évènement la personne pratique le Tennis et C l'évènement la personne fait du Canoé. On peut donc compléter le diagramme suivant.
On a ainsi par exemple les deux valeurs :

$$P(C \cap T) = 0{,}05$$



Remarque :

Il faut faire attention à ne pas compter plusieurs fois le même élément.

c) L'arbre pondéré

Un arbre pondéré est un arbre dans lequel chaque branche est affectée d'une probabilité, avec les règles suivantes :

Règles :

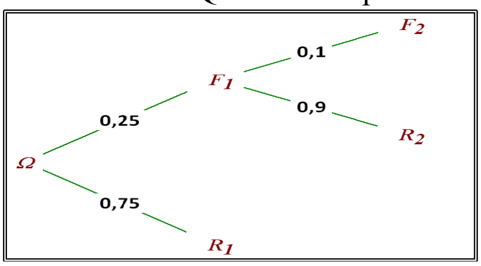
• La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.
• La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités rencontrées le long de ce chemin.
• La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui conduisent à cet événement.

Méthode :

On utilise un arbre de probabilité lorsqu'il y a une notion chronologique dans l'énoncé. C'est aussi le cas si des probabilités conditionnelles interviennent. Si le mot parmi apparaît dans l'énoncé, l'arbre est souvent très utile.

Exemple :

Un joueur de tennis réussit sa première balle de service à 75%. Il réussit sa seconde balle de service à 90%. Quelle est la probabilité pour que ce joueur commette une double faute ?



Solution :

On en déduit donc que la probabilité de commettre une double faute est donnée par :

$$P(F_1 \cap F_2) = 0{,}25 \times 0{,}1 = 0{,}025$$

Exercice :

Une urne contient une boule blanche, deux boules rouges et trois boules vertes.
Les boules sont indiscernables. On extrait successivement deux boules de l'urne sans remise dans l'urne de la première boule tirée.
Trouver la probabilité de chacun des événements suivants :

Solution :

A : Les deux boules sont rouges.

$$P(A)=\frac{2}{6}\times 0,2=\frac{1}{15}$$

B : les deux boules sont de couleurs différentes.

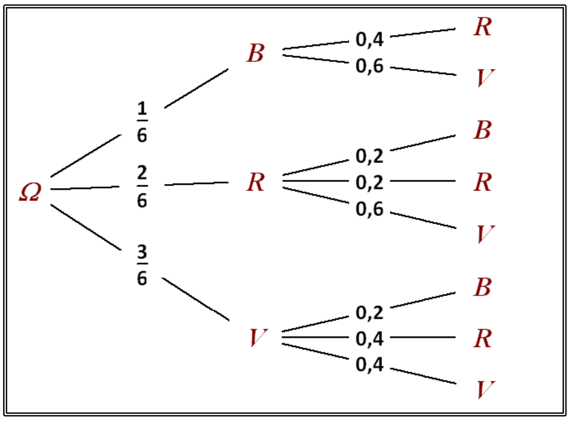
$$P(B)=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}\times 0,8+\frac{3}{6}\times 0,6=\frac{11}{15}$$

C : le tirage comporte au moins une boule rouge.

$$P(C)=\frac{1}{6}\times 0,4+\frac{2}{6}+\frac{3}{6}\times 0,4=0,6$$

D : le tirage comporte exactement une boule verte.

$$P(D)=\frac{1}{6}\times 0,6+\frac{2}{6}\times 0,6+\frac{3}{6}\times 0,6=0,6$$



2) *Probabilités conditionnelles*

a) *Exemple introductif*

On interroge à la sortie des urnes 1000 électeurs, 500 hommes et 500 femmes.
Deux candidats briguaient leurs suffrages ; les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous.

	Votants pour A	Votants pour B	Bulletins nuls	Total
Hommes	220	195	85	500
Femmes	180	235	85	500
Total	400	430	170	1000

1) Quelle est la fréquence des votants pour A, puis pour B, enfin des bulletins nuls.
On note $f_A ; f_B ; f_N$ ces fréquences.

- $f_A=\dfrac{400}{1000}=0,4$
- $f_B=\dfrac{430}{1000}=0,43$
- $f_N=\dfrac{170}{1000}=0,17$

2) Quelle est la fréquence des votants pour A parmi les femmes ? On note $f_{A/F}$ cette fréquence.

$f_{A/F}=\dfrac{180}{500}=0,36$ 36% des femmes ont voté pour le candidat A.

3) Quelle est la fréquence des hommes parmi les électeurs de B ?

$f_{H/B}=\dfrac{195}{430}=0,453$ Parmi les électeurs de B, il y a 45,3 % d'hommes.

4) Répondre par VRAI ou par FAUX à chacune des affirmations suivantes :

- 39 % des hommes ont voté pour B.

$$f_{B/H}=\frac{195}{500}=0,39$$

- 36 % des électeurs de A sont des femmes.

$$f_{F/A}=\frac{180}{400}=0,45$$

- 17 % des bulletins nuls émanent des hommes.

$$f_{H/N}=\frac{85}{170}=0,5$$

- Le vote nul est indépendant du sexe de l'électeur.

$$f_{N/H}=\frac{85}{500}=f_{N/F}$$

b) Définition

Définition :

Soit P une probabilité sur un univers fini Ω et A un événement tel que $P(B) \neq 0$
Pour tout événement A, la probabilité conditionnelle de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé est donnée par : $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Remarques :

- Au siècle dernier, la notation était : $P(A/B)$
- De la définition : $P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$ qui donne la probabilité de l'intersection.
- Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$: $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$
- ATTENTION : ne pas confondre $P(B \cap A)$ et $P_A(B)$.

Avec les données de l'exemple introductif, on obtient les résultats suivants :

- La probabilité que l'électeur interrogé soit un homme qui a voté pour B est :

$$P(H \cap B) = \frac{card(H \cap B)}{card\Omega} = \frac{195}{1000} = 0{,}195$$

C'est la proportion d'hommes ayant voté B parmi la population totale.

- La probabilité que l'électeur interrogé ait voté B sachant que c'est un homme est :

$$P_H(B) = \frac{P(H \cap B)}{P(H)} = \frac{0{,}195}{0{,}5} = 0{,}39$$

C'est la proportion de votants pour B parmi les hommes.

Propriétés :

- Pour tout événement A tel que $P(A) \neq 0$, $P_A(A) = 1$
- Si $P(A) \neq 0$, $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$

Exercice :

Une urne contient 5 boules rouges et trois boules noires. On tire au hasard et successivement deux boules de l'urne sans remettre la $1^{\text{ère}}$ boule tirée dans l'urne. Déterminer de deux manières différentes la probabilité d'obtenir deux boules rouges :

a) En utilisant les dénombrements.
b) En utilisant les probabilités conditionnelles.

Solution :

Puisqu'on ne remet pas la boule tirée dans l'urne, il y a 56 tirages possibles. Notons G l'événement « obtenir deux boules rouges » :

a) A l'aide du dénombrement, on obtient alors $P(G) = \dfrac{5 \times 4}{56} = \dfrac{5}{14}$

Il y a en effet 5 possibilités pour la $1^{\text{ère}}$ boule puis 4 pour la 2^{nde}.

b) En utilisant les probabilités conditionnelles, on a :

$$P(G) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$$

En effet après le premier tirage, la composition de l'urne change. Il n'y a plus que 7 boules puisque les tirages s'effectuent sans remise.

c) La formule des probabilités totales

Exemple :

Une verrerie industrielle assure sa production de flacons à l'aide de trois machines appelées m_1, m_2, m_3.

Chacune assure une part de la production totale, avec un certain taux de déchet donné par le tableau :

Machine	Part de production	Taux de déchet
m_1	20 %	5 %
m_2	30 %	2 %
m_3	50 %	1 %

On choisit au hasard un flacon parmi les flacons fabriqués. Quelle est la probabilité que ce flacon soit défectueux ?

Notons : M_1 l'événement : « le flacon est fabriqué par la machine m_1 », M_2 et M_3 les événements définis de manière identique. *Et D* : « le flacon choisi est défectueux ».

A la lecture du tableau, nous avons : $P(M_1)=0{,}2$ $P(M_2)=0{,}3$ et $P(M_3)=0{,}5$

Ainsi que : $P_{M_1}(D)=0{,}05$ $P_{M_2}(D)=0{,}02$ et $P_{M_3}(D)=0{,}01$

Pour trouver la probabilité que la pièce soit défectueuse, on calcule :

$P(D)=P(M_1)\times P_{M_1}(D)+P(M_2)\times P_{M_2}(D)+P(M_3)\times P_{M_3}(D)$ soit alors $P(D)=0{,}021$

Définition :

Des événements $E_1, E_2, \dots, E_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $n\geq 2$ forment ***une partition d'un univers*** Ω si :

$$\begin{cases} E_i \neq \varnothing \text{, pour tout } i\in\{1;2;\dots;n\} \\ E_i\cap E_j=\varnothing \quad \text{si } i\neq j. \\ E_1\cup E_2\cup\dots\dots\cup E_n=\Omega \end{cases}$$

Remarques :

- On résume en disant que l'intersection de deux évènements est toujours disjointe et que la réunion de tous les évènements recouvre tout l'univers.
- Par exemple, dans une classe d'élèves, on peut former une partition en utilisant le sexe, la couleur des yeux, la couleur des cheveux, le lieu d'habitation.
- En première, on partitionne souvent avec un événement et son contraire.
- On utilise aussi l'expression système complet d'évènements pour parler de partition.

Théorème : (Formule des probabilités totales)

Soit P une probabilité sur un univers Ω et $E_1, E_2, \dots, E_n$ des événements formant une partition de Ω, tels que $P(E_i)\neq 0$ $\forall i\in\{1,2,\dots,n\}$. Alors, pour tout événement A :

$P(A)=P(A\cap E_1)+P(A\cap E_2)+\dots\dots +P(A\cap E_n)$ où $P(A\cap E_i)=P_{E_i}(A)\times P(E_i)$ $\forall i\in[|1;n|]$

Démonstration

Nous allons prouver le cas particulier ou la partition est formée de A et de son contraire.

Soit B un événement tel que : $P(B)\neq 0$. Alors B et $\overline{B}$ forment une partition de Ω.

Alors, pour tout événement A de Ω, on a : $A=(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$

Et donc $P(A)=P((A\cap B)\cup(A\cap\overline{B}))$. Puisque les évènements $(A\cap B)$ et $(A\cap\overline{B})$ sont incompatibles, leur intersection est vide. On a donc alors $P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})$

En utilisant la formule de l'intersection, on a : $P(A)=P_B(A)\times P(B)+P_{\overline{B}}(A)\times P(\overline{B})$

d) Exemple

Exercice :

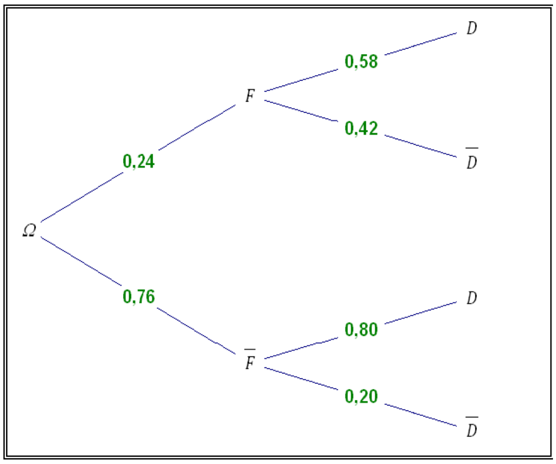
Au Luxembourg une enquête révèle qu'en 2010, 24% de la population fume. La fumée dérange 80% des non-fumeurs et 58% des fumeurs. On interroge au hasard un habitant du Luxembourg.

On note F l'événement « être fumeur » et D « la fumée dérange ».

1. Construire un arbre de probabilités illustrant cette situation.
2. Calculer $P(D)$

Solution :

On trace un arbre pour modéliser la situation :



F et $\overline{F}$ forment une partition de l'univers ou un système complet d'évènements.

A l'aide de la formule des probabilités totales, on a :

$$P(D) = P(D \cap F) + P\left(D \cap \overline{F}\right)$$
$$P(D) = P(F) \times P_F(D) + P\left(\overline{F}\right) \times P_{\overline{F}}(D)$$
$$P(D) = 0{,}24 \times 0{,}58 + 0{,}76 \times 0{,}8$$
$$P(D) = 0{,}7472$$

Remarque :

Il faut toujours écrire la formule avec les lettres avant de remplacer.

e) La formule de Bayes- Laplace

Formule de Bayes :

Soient deux évènements A et B de l'univers avec $P(B) \neq 0$ alors, $P_B(A) = \frac{P_A(B) \times P(A)}{P(B)}$

Remarque :

On dit qu'on « retourne » l'arbre. Cette formule permet d'inverser conditions et conclusions.

Exercice

Un institut pharmaceutique a mis au point un test de grossesse et souhaite le tester. Il demande à 300 femmes d'essayer ce test de grossesse. Parmi elles, 240 sont enceintes et 60 ne le sont pas. Les résultats sont les suivants : 99% des femmes enceintes ont un test positif et 97% des femmes non enceintes ont un test négatif.

On interroge une femme au hasard et on lui demande quel est le résultat de son test. On considèrera l'événement E : « la femme est enceinte » et l'événement T : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré illustrant cette situation.
2. Calculer la probabilité que le test soit positif.
3. Cependant, l'utilisation de ce test n'intéresse que les femmes qui ne savent justement pas si elles sont enceintes ou non.

Quelle est la probabilité qu'une femme soit enceinte sachant que le test est positif ?

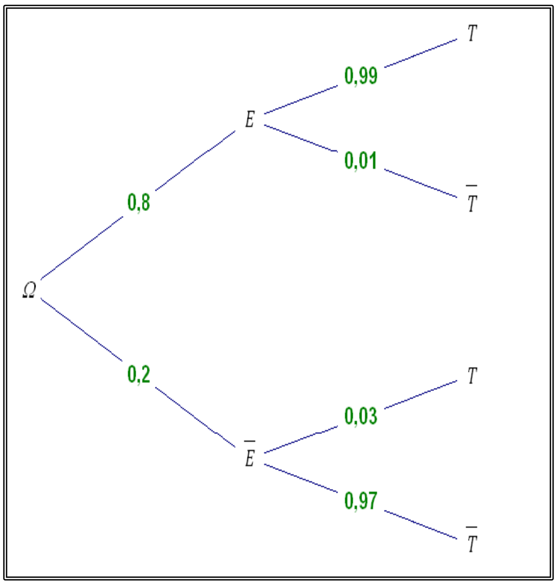
Solution :

A l'aide de la formule des probabilités totales,

$$P(T) = P(T \cap E) + P(T \cap \overline{E})$$
$$P(T) = P(E) \times P_E(T) + P(\overline{E}) \times P_{\overline{E}}(T)$$
$$P(T) = 0{,}99 \times 0{,}8 + 0{,}03 \times 0{,}2$$
$$P(T) = 0{,}798$$

On cherche maintenant la probabilité que la femme soit enceinte sachant que le test est positif.

$$P_T(E) = \frac{P_E(T) \times P(E)}{P(T)}$$
$$P_T(E) = \frac{0{,}99 \times 0{,}8}{0{,}798}$$
$$P_T(E) = 0{,}992$$



3) *Indépendance d'évènements*

Reprenons l'activité sur le vote.

	Votants pour *A*	Votants pour *B*	Bulletins nuls	Total
Hommes	220	195	85	500
Femmes	180	235	85	500
Total	400	430	170	1000

Considérons les événements :
F : « l'électeur choisi est une femme ».
N : « l'électeur choisi a voté nul ».

$P(N) = \dfrac{170}{1000} = 0{,}17$ $\quad P(F) = \dfrac{500}{1000} = 0{,}5$ $\quad P(N \cap F) = \dfrac{85}{1000} = 0{,}085$ $\quad P_F(N) = \dfrac{85}{500} = 0{,}17$

La proportion de bulletins nuls n'est pas changée selon que l'on se place :
– dans la population totale.
– dans la population des femmes.
La réalisation de l'événement *F* ne modifie pas la probabilité de l'événement *N* :
L'événement *N* est indépendant de l'événement *F*.

On remarque que : $P_F(N) = P(N) \Leftrightarrow \dfrac{P(N \cap F)}{P(F)} = P(N) \Leftrightarrow P(N \cap F) = P(N) \times P(F)$

Définition :

Deux événements *A* et *B* sont indépendants pour une probabilité *P* si:
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Remarque :

Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$: *A* et *B* indépendants $\Leftrightarrow P_A(B) = P(B) \Leftrightarrow P_B(A) = P(A)$

Exercice :

Une usine fabriquant des microprocesseurs pouvant présenter deux défauts notés *A* et *B* a réalisé une étude statistique donnant les résultats suivants.

- 9 % des microprocesseurs présentent le défaut *A*.
- 6 % des microprocesseurs présentent le défaut *B*.
- 88 % des microprocesseurs ne présentent aucun défaut.

Les événements *A* et *B* sont-ils indépendants.

Correction :

L'utilisation d'un tableau semble plus indiquée ici.

On a $P(A) = 0{,}09$ $P(B) = 0{,}06$ et $P(A \cap B) = 0{,}03$

Puisque$P(A) \times P(B) = 0{,}0054$, les évènements ne sont pas indépendants.

	B	$\overline{B}$	
A	0,03	0,06	0,09
$\overline{A}$	0,03	0,88	0,91
	0,06	0,94	1

Remarque :

Il ne faut pas confondre indépendance et incompatibilité.

Exercice :

Considérons un dé à six faces, parfaitement équilibré et les événements :
A : « obtenir un numéro inférieur ou égal à 3 ».
B : « obtenir un multiple de 3 ».
C : « obtenir un numéro pair ».
Étudier l'indépendance puis l'incompatibilité des événements : A et B ; A et C.
Peut-on trouver un événement D (non impossible) tel que A et D soient indépendants et incompatibles ?

Correction :

Toutes les issues élémentaires sont équiprobables. On a donc :

$P(A) = \frac{1}{2}$ $P(B) = \frac{1}{3}$ $P(C) = \frac{1}{2}$. De même, $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ $P(A \cap C) = \frac{1}{6}$ $P(C \cap B) = \frac{1}{6}$

On observe que A et B sont indépendants, que B et C sont indépendants mais pas A et C.
On ne peut pas trouver d'événement D, non impossible, indépendant et incompatible avec A.
En effet, si A et D sont incompatibles $P(A \cap D) = 0$. Il faut donc que soit A, soit D aient une probabilité nulle, ce qui contredit l'hypothèse.

> ***Propriété :***
> Si deux événements A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont aussi indépendants.

Démonstration :

On suppose que A et B sont indépendants donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

On utilise la formule des probabilités totales puisque B et $\overline{B}$ forment une partition de Ω.

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$ soit en remplaçant $P(A) = P(A) \times P(B) + P(A \cap \overline{B})$

En factorisant l'expression, $P(A \cap \overline{B}) = P(A)(1 - P(B))$ donc $P(A \cap \overline{B}) = P(A)P(\overline{B})$

4) Répétition d'épreuves

a) Épreuves identiques indépendantes

Exercice :

On dispose d'une pièce truquée qui tombe une fois sur trois sur « face » et donc deux fois sur trois sur « pile ». On lance cette pièce trois fois de suite et on appelle N le rang du lancer donnant le premier pile.
Déterminer l'univers des possibles et donner toutes les probabilités élémentaires

Correction :

1) Les valeurs possibles pour N sont $\Omega = \{0,1,2,3\}$
2) On regroupe les valeurs dans un tableau.

$N = n_i$	0	1	2	3	TOTAL
$p_i = P(N = n_i)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{27}$	1

b) Épreuves différentes

La répétition d'épreuves non identiques n'est pas un attendu du programme. Elle sera enseignée en classe de Terminale. Cependant, on peut procéder à un exemple pour comprendre ce qui se passe. La notion de probabilité conditionnelle intervient à cet endroit.

Exercice :

Une urne contient 13 boules noires et 7 boules blanches. On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne. Combien de boules noires peut-on espérer en moyenne ?

Correction :

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules noires à l'issue des deux tirages. Puisque les tirages sont successifs et sans remise, la composition de l'urne change entre les deux tirages. On peut s'aider d'un arbre de probabilité pour y voir plus clair.

$X = x_i$	0	1	2	TOTAL
$p_i = P(X = x_i)$	$\dfrac{21}{190}$	$\dfrac{91}{190}$	$\dfrac{39}{95}$	1
$x_i p_i$	0	$\dfrac{91}{190}$	$\dfrac{78}{95}$	$E(X) = \dfrac{13}{10}$

c) Comparer des situations

Un sac contient : 1 jeton numéroté 1 ; 2 jetons numérotés 2 ; 3 jetons numérotés 3 ; 4 jetons numérotés 4 et 5 jetons numérotés 5. On tire au hasard et successivement 2 jetons du sac et on note la somme obtenue. A-t-on plus de chances d'obtenir une somme égale à 8 en tirant 2 jetons avec ou sans remise ?

Correction :

Le sac contient un total de 15 jetons. Pour obtenir 8, on doit avoir un jeton 5 et un jeton 3 ou deux jetons 4. On note A l'événement « obtenir une somme de 8 ».

Premier cas : avec remise

On peut éventuellement s'aider d'un arbre

$$P(A) = \frac{3}{15} \times \frac{5}{15} + \frac{5}{15} \times \frac{3}{15} + \frac{4}{15} \times \frac{4}{15} = \frac{46}{225}$$

Deuxième cas : sans remise

On peut éventuellement s'aider d'un arbre

$$P(A) = \frac{3}{15} \times \frac{5}{14} + \frac{5}{15} \times \frac{3}{14} + \frac{4}{15} \times \frac{3}{14} = \frac{42}{210}$$

C'est donc le cas avec remise qui donne la plus grande probabilité.