Probabilités

Capacités attendues en fin de chapitre :

- Utiliser des modèles théoriques de référence (dés, pièces équilibrées, tirage au sort).
- Construire un modèle à partir de fréquences observées.
- Calculer des probabilités dans des cas simples : expérience aléatoire à deux ou trois épreuves.
- Formule de Poincaré aussi appelée formule du crible

Le mathématicien du chapitre :

De très nombreux mathématiciens ont contribués à développer ce chapitre des mathématiques très important : Cardan au 16ème siècle, Pascal au 17ème, puis Bayes, Moivre, Leibniz au 18ème et 19ème.
En classe de seconde, c'est la formule de Poincaré qui est mise en avant. Henri Poincaré (1854 -1912) travailla dans de nombreux domaines notamment en probabilité. Il aimait beaucoup lire et mémorisait tout ce qu'il voyait. Sa myopie lui fit développer une mémoire auditive exceptionnelle qui lui permettait de se souvenir de ses cours sans prendre de notes.

1) *Expériences Aléatoires*

a) *Notion d'expérience aléatoire*

On lance un dé non truqué à six faces numérotées de 1 à 6 et on note le nombre figurant sur la face supérieure du dé.

Lancer ce dé et noter le nombre figurant sur la face supérieure est une expérience dont on ne peut pas connaître à l'avance le résultat.

On dit qu'il s'agit d'une expérience aléatoire, c'est à dire une expérience liée au hasard pouvant conduire à plusieurs issues, qu'on appelle évènement élémentaire.

Définition :

Une expérience est dite ***aléatoire*** si elle vérifie deux conditions :

a) Elle conduit à des résultats possibles qu'on est parfaitement capable de nommer

b) On ne sait pas lequel de ces résultats va se produire quand on réalise l'expérience.

Exemples :

- Avoir un enfant est une expérience aléatoire.
- Piocher une carte dans un sabot est une expérience aléatoire.
- Le résultat d'un tirage du loto est une expérience aléatoire.

b) *Vocabulaire*

- L'***univers***, noté en général Ω, est l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire.
- Un ***événement*** est une partie de l'univers. On le désigne souvent par une lettre majuscule et on le décrit en français ou sous forme ensembliste.
- Un ***événement élémentaire*** est un événement formé d'un seul résultat de l'expérience aléatoire.
- L'***événement contraire*** d'un événement A est noté $\bar{A}$. Il est constitué de tous les éléments de l'univers qui ne sont pas dans A.

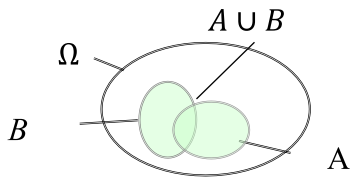
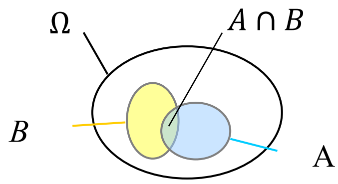
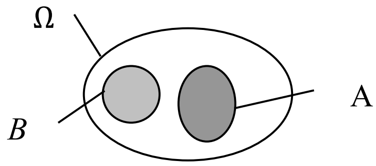
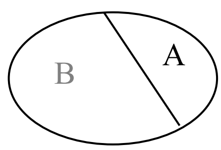
- On appelle ***Cardinal*** d'un ensemble fini le nombre d'éléments qui sont dans cet ensemble. On le note card(…)

Exemples :

- Lorsqu'on pioche une carte dans un sabot de 32 cartes, le cardinal de Ω est 32 ;
- Lorsqu' on jette une pièce de monnaie, le cardinal de Ω est 2 car on ne peut obtenir que pile ou face.

c) Intersection, réunion, contraire et évènements disjoints

Le tableau ci-dessous résume les définitions et notations importantes relatives à la notion d'événement. A, B et C représentent des événements d'un univers Ω lié à une expérience aléatoire.

Vocabulaire et notation	*Représentation ensembliste*
C'est la ***réunion*** de A et de B : On la note :$A \cup B$. Elle comporte les éléments dans A, dans B ou dans les 2	
C'est l'***intersection*** de A et B. On la note :$A \cap B$. Elle comporte les éléments qui sont simultanément dans A et dans B.	
A et B sont ***disjoints*** (ou ***incompatibles***) si leur intersection est vide. $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \emptyset$	
A et B sont ***contraires*** ou ***complémentaires*** lorsqu'ils sont disjoints et que leur réunion recouvre tout l'univers. On le note : $\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{B}$	$A \cap B = \emptyset$. et $A \cup B = \Omega$ 

Propriété :

Soient A et B deux évènements, on a alors $A \cap B \subseteq A \cup B$

Remarque :

En Français, l'intersection de deux ensembles est inclue dans leur réunion ce qui se comprend très bien en observant les dessins ci-dessus.

Exemples :

Un sac contient 5 jetons verts numérotés de 1 à 5 et 7 jetons rouges numérotés de 6 à 12.
On tire au hasard un jeton du sac

a. Si on s'intéresse à la couleur du jeton, l'univers Ω de cette expérience aléatoire peut s'écrire : $\Omega = \{vert; rouge\}$
Mais si on s'intéresse au numéro sur le jeton, l'univers devient : $\Omega' = \{1,2,\ldots,12\}$
b. On considère l'événement A : « le jeton tiré porte un numéro pair ».
On peut écrire sous forme ensembliste : $A = \{2,4,6,8,10,12\}$
c. Pour notre expérience aléatoire, il y a12 événements élémentaires si on s'intéresse au numéro tiré et deux si on s'intéresse à la couleur.
d. L'événement contraire de A, noté $\overline{\boldsymbol{A}}$: « le jeton tiré porte un numéro impair
e. On considère l'événement B : « le jeton tiré est rouge ».
On en déduit que : $A \cap B = \{6,8,10,12\}$ *et* que $A \cup B = \{2,4,6,7,8,9,10,11,12\}$
f. On considère l'événement C : « le jeton tiré porte un numéro inférieur à 5 ».
Les événements B et C sont incompatibles. En effet, on a $C \cap B = \emptyset$.

2) *Probabilités*

a) *La loi des grands nombres*

Lorsqu'on répète une expérience aléatoire *N* fois, on appelle fréquence d'apparition d'une éventualité donnée apparue *n* fois, le nombre : $f = \frac{n}{N}$
On constate que si l'on répète un grand nombre de fois l'expérience donnée, les différentes fréquences d'apparition ont tendance à se stabiliser, ce qui n'est parfois que théorique car répéter une expérience aléatoire dans les mêmes conditions n'est pas toujours envisageable.
Ce constat est un résultat mathématique appelé « ***La loi des grands nombres*** ».

Remarque :

Lorsqu'on jette un dé équilibré à 6 faces, une fois, et que le chiffre 3 apparaît, cela ne veut pas dire que ce sera toujours le chiffre trois qui va sortir. Il faut donc répéter un grand nombre de fois cette expérience pour envisager d'émettre une conjecture…

Exemple :

On a obtenu les résultats suivants :

1 000 lancers			
	PILE	FACE	TOTAL
Effectif	521	479	1 000
Fréquence	0,521	0,479	1

Pile / face

10 000 lancers			
	PILE	FACE	TOTAL
Effectif	4961	5039	10 000
Fréquence	0,4961	0,5039	1

On remarque que la fréquence se rapproche de 0,5…. Sans surprise…

Remarques :

- Dans certains cas, déterminer une loi de probabilité peut paraître évident comme pour un lancer de dé ou de pièce, un tirage dans un jeu de cartes…
- Dans d'autres cas, lorsqu'on ne connaît pas de loi de probabilité relativement à une expérience aléatoire, on peut ainsi en introduire une à partir des fréquences déterminées lors d'un grand nombre d'expériences.

Exemples :

- Comment déterminer la probabilité qu'une personne réponde au téléphone si on l'appelle entre 12h et 14h ?
- Comment déterminer la probabilité qu'un joueur de tennis réussisse un ace en match ?

b) *Situation d'équiprobabilité*

Définition :

Lorsque tous les évènements élémentaires d'un univers ont la même probabilité d'apparaître, on dit qu'il y a équiprobabilité. Dans ce cas, si l'univers Ω est composé de n évènements élémentaires notés $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, alors : $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}$

Remarque :

Les expressions suivantes « dé parfait ou équilibré ou non pipé», « boule tirée de l'urne au hasard », « boules indiscernables au toucher » … indiquent que pour les expériences réalisées, le modèle associé est l'équiprobabilité (dans le cadre d'une réalisation honnête… cf image Donald et son tirage d'un billet)

c) *Définition*

Définition :

On note $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$l'ensemble des éventualités d'une expérience aléatoire.
Définir une loi de probabilité sur Ω, c'est associer à chaque résultat $\omega_i$un nombre p_i (appelé probabilité de l'issue ω_i) positif ou nul de telle façon que :
a) La somme de toutes les probabilités élémentaires vaut 1.
b) La probabilité d'un évènement est la somme de toutes les probabilités élémentaires qui le composent.

Exercice :

Le dé est non truqué : chacune des faces a la même chance d'être obtenue. Il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.
Dans ce cas, il est donc aisé de définir la loi de probabilité :

Face	1	2	3	4	5	6	Total
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

Donner les probabilités de chaque évènement suivant :
- A : « obtenir un nombre pair » : $P(A) = \frac{1}{2}$
- B : « obtenir un nombre strictement supérieur à 4 » : $P(B) = \frac{1}{3}$
- C : « obtenir le contraire de B » : $P(C) = P(\bar{B}) = 1 - P(B) = \frac{2}{3}$

Remarque :

La loi de probabilité est très souvent présentée dans un tableau comme celui-ci-dessus. On reprend dans ce tableau les probabilités de chaque évènement élémentaire.

d) *Principes de base*

Définition :

De manière générale, dans le cadre de l'équiprobabilité, lorsque Ω est un ensemble fini, on obtient la probabilité d'un évènement en utilisant la formule : $P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$

Remarque :

On traduit souvent cette formule par : cas favorables sur cas possibles, plus simple à retenir.

Exercice :

Une urne contient 10 boules indiscernables, 5 rouges, 3 jaunes et 2 vertes. On tire au hasard 1 boule de cette urne.

- Quelle est la probabilité de tirer une boule verte ? $P(V) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$
- Quelle est la probabilité de tirer une boule d'une couleur primaire ? $P(B) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$
- Quelle est la probabilité de tirer une boule de couleur violette ? $P(C) = 0$

e) Propriétés

Propriété :

Soient A et B deux évènements de Ω, alors :
a) la probabilité de l'évènement certain est : $P(\Omega) = 1$
b) la probabilité de l'évènement impossible est : $P(\emptyset) = 0$
c) Si $A \subseteq B$, alors $P(A) \leq P(B)$

Formule de Poincaré :

Soient A et B deux évènements de Ω, alors : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Exercice :

On tire au hasard une carte dans un jeu de Belote de 32 cartes.
Donner les probabilités de chaque évènement :

a) Quelle est la probabilité de tirer un Cœur ? $P(C) = \frac{1}{4}$
b) Quelle est la probabilité de tirer un roi ? $P(R) = \frac{1}{8}$
c) Quelle est la probabilité de tirer le roi de cœur ? $P(R \cap C) = \frac{1}{32}$
d) Quelle est la probabilité de tirer un roi ou un cœur ? $P(R \cup C) = \frac{11}{32}$

3) *Résoudre un problème*

a) Utiliser un diagramme.

Méthode :

On utilise parfois un diagramme de ***Venn*** pour déterminer les effectifs de chaque catégorie. La construction s'effectue alors par soustraction.

Exemple :

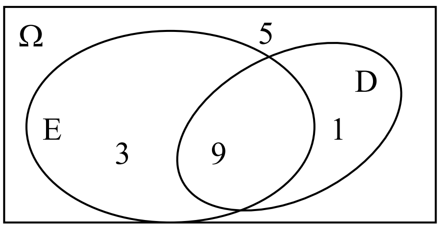
Une tentative d'homicide par balle a eu lieu au cours d'un bal. La police a posé à chacune des 18 personnes présentes les questions suivantes : Avez-vous entendu une détonation ? Avez-vous vu quelqu'un s'enfuir ?

- Dix personnes ont répondu « oui » à la première question.
- Six personnes ont répondu « non » à la deuxième question.
- Cinq personnes ont répondu « non » aux deux questions.

On choisit une personne au hasard : Quelle est la probabilité que cette personne ai répondu « oui » aux deux questions ?

Solution :

On note E l'évènement s'enfuir et D l'évènement détonation. On peut donc compléter le diagramme suivant.
On a ainsi : $P(E \cap D) = \frac{9}{18}$



b) Utiliser un tableau

Méthode :

On utilise un tableau lorsqu'il n'y a pas de notion d'ordre chronologique et que plusieurs critères sont croisés. Par exemple, modes de paiement et montant des achats

On reprend l'exercice précédent. Avec les données de l'énoncé, on a :

	E	$\bar{E}$	Total
D	9	1	10
$\bar{D}$	3	5	8
Total	12	6	18

On retrouve le résultat $P(E \cap D) = 0{,}5$ à l'intersection de la colonne et de la ligne.

Exercice :

Les 800 élèves d'un lycée possèdent une montre, soit du type M_1 soit du type M_2
- Il y a 70% de montres de type M_1.
- La moitié des montres de type M_1 a un bracelet en cuir.
- 16,25% des montres de type M_1 ont un bracelet métallique.
- Parmi les montres de type M_2, il y a trois fois plus de montres à bracelet en tissu que de montres à bracelet métallique.
- Il n'existe pas de montres de type M_2 avec un bracelet en cuir.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant :

	Cuir	Métal	Tissu	Total
M_1	280	91	189	560
M_2	0	60	180	240
Total	280	151	369	800

2. Parmi l'ensemble de toutes les montres quel est le pourcentage des montres de type M_2 à bracelet en tissu ? $\frac{180}{800} \times 100 = 22{,}5\%$
3. Parmi les montres de type M_2, quel est le pourcentage de celles qui ont un bracelet métallique ? Il y a un quart de ces montres qui ont un bracelet métallique.

Dans les questions suivantes, les probabilités seront données à 10^{-3} près.
4.. On choisit un élève au hasard parmi les 800 élèves du lycée.
Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
A « la montre de l'élève a un bracelet métallique ». $P(A) = \frac{151}{800} \approx 0{,}189$
B « la montre de l'élève est de type M_2 ». $P(B) = \frac{240}{800} = 0{,}3$
5. Définir par une phrase les évènements $A \cap B$et $A \cup B$puis calculer leur probabilité.
$A \cap B$: La montre est de type M_2 et a un bracelet métallique : $P(A \cap B) = \frac{60}{800} \approx 0{,}075$
$A \cup B$: La montre est de type M_2 ou a un bracelet métallique : $P(A \cup B) = \frac{331}{800} \approx 0{,}414$
6. On choisit au hasard un élève ayant une montre de type M_1. Quelle est la probabilité de l'évènement C « la montre de l'élève a un bracelet en tissu » ? Il faut être vigilant car l'univers change. On ne s'intéresse qu'aux montres M_1. Donc $P(C) = \frac{189}{560} \approx 0{,}338$

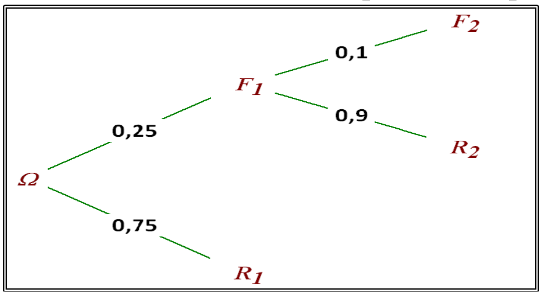
c) Utiliser un arbre

Méthode :

On utilise un arbre de probabilité lorsqu'il y a une notion chronologique dans l'énoncé. C'est aussi le cas si des probabilités conditionnelles interviennent. Si le mot parmi apparaît dans l'énoncé, l'arbre est souvent très utile.

Exemple :

Un joueur de tennis réussit sa première balle de service à 75%. Il réussit sa seconde balle de service à 90%. Quelle est la probabilité pour que ce joueur commette une double faute ?



Solution :

On en déduit donc que la probabilité de faire une double faute est donnée par :
$P(F_1 \cap F_2) = 0{,}25 \times 0{,}1 = 0{,}025$

Exercice :

Une urne contient une boule blanche, deux boules rouges et trois boules vertes.
Les boules sont indiscernables. On extrait successivement deux boules de l'urne sans remise dans l'urne de la première boule tirée.
Trouver la probabilité de chacun des événements suivants :

Solution :

A : Les deux boules sont rouges.

$$P(A) = \frac{2}{6} \times 0{,}2 = \frac{1}{15}$$

B : les deux boules sont de couleurs différentes.

$$P(B) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \times 0{,}8 + \frac{3}{6} \times 0{,}6 = \frac{11}{15}$$

C : le tirage comporte au moins une boule rouge.

$$P(C) = \frac{1}{6} \times 0{,}4 + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} \times 0{,}4 = 0{,}6$$

D : le tirage comporte exactement une boule verte.

$$P(D) = \frac{1}{6} \times 0{,}6 + \frac{2}{6} \times 0{,}6 + \frac{3}{6} \times 0{,}6 = 0{,}6$$