# Primitives et équations différentielles

***Capacités attendues en fin de chapitre :***

- Calculer une primitive en utilisant une primitive de référence.
- Calculer une primitive en utilisant une fonction composée.
- Pour une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ $(a \neq 0)$, déterminer une solution particulière constante. Utiliser cette solution pour déterminer toutes les solutions.
- Pour une équation différentielle de la forme $y' = ay + f$ $(a \neq 0)$, à partir de la donnée d'une solution particulière, déterminer toutes les solutions.

***Le mathématicien du chapitre :***

Joseph Louis de Lagrange (1736 – 1813) est un mathématicien né à Turin. Il fonda l'académie des sciences de Turin en 1758. Il est l'un de promoteurs du calendrier révolutionnaire. Il œuvra dans de nombreux domaines, notamment sur le calcul des variations. Une équation différentielle porte son nom, la méthode de la variation de la constante permettant de trouver toutes les solutions est aussi issue de ses travaux.

## 1) Définitions

### a) Définition d'une équation différentielle

***Définition :***

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$.
On dit qu'une fonction $F$ est solution de l'équation différentielle $y' = f$ sur $I$ lorsque $F$ est dérivable sur $I$ et que $F' = f$
Résoudre une équation différentielle, c'est trouver toutes les fonctions qui la vérifient.

***Exemple :***

- On donne l'équation différentielle $(E): y' = e^x$. L'exponentielle étant sa propre dérivée, elle est solution de l'équation $(E)$. La fonction $x \mapsto e^x - 5$ est aussi une solution de $(E)$.
- On donne l'équation $(E): y'' = -cos(x)$. La fonction $x \mapsto cos(x)$ est une solution de cette équation différentielle. Cette équation est une équation linéaire d'ordre 2.

### b) Définition d'une primitive

***Définition :***

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$. Une fonction $F$ est une primitive de $f$ sur $I$ si :

- $F$ est dérivable sur $I$
- $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$

***Remarque :***

- En d'autres termes, $f$ est la dérivée de $F$.
- Le terme exact est une primitive. Cette subtilité suggère qu'il peut y en avoir plusieurs pour une même fonction sur un même intervalle.
- Si dériver c'est descendre, intégrer c'est monter !

***Exemples :***

- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 3x^2$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = x^3$ est une primitive de $f$.
- Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x^2 - x + 3 + \frac{2}{x}$,
  Une primitive de $f$ sur $I = ]0; +\infty[$ est la fonction $F$ définie sur $I$ par :
  $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x + 2ln(x) + 7$. La constante 7 est un choix arbitraire. Nous verrons plus loin le choix de cette constante.

## 2) ***Existence des primitives***

***Théorème :***

Si *f* est une fonction continue sur un intervalle *I*, alors *f* admet des primitives sur *I*.

***Remarques :***

• Si *f* est une fonction dérivable sur un intervalle *I*, alors *f* est continue sur *I*. Donc *f* admet des primitives sur *I*.
• La réciproque du théorème ci-dessus est fausse. Certaines fonctions peuvent admettre des primitives sur un intervalle sans être continues sur cet intervalle. Par exemple, la fonction *F* définie sur ℝ par : $\begin{cases} F(x) = x^2 sin\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$ est une primitive sur ℝ de la fonction *f* définie sur ℝ par : $\begin{cases} f(x) = 2xsin\left(\frac{1}{x}\right) - cos\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ On le démontrerait en prouvant que *F* est dérivable sur ℝ avec $F' = f$, puis que *f* n'est pas continue en 0.

## 3) ***Ensemble des primitives***

***Théorème :***

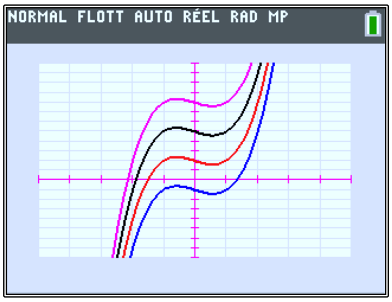
Soit *f* une fonction continue sur un intervalle *I* et *F* une primitive de *f* sur *I*. Alors l'ensemble des primitives de *f* sur *I* est l'ensemble des fonctions $x \mapsto F(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$

***Démonstration :***

$\forall x \in I$, on note $G(x) = F(x) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$. Montrons alors que *G* est une primitive de *f*.
On sait que *F* est dérivable sur *I* donc *G* est dérivable sur *I*.
$\forall x \in I$, on a : $G'(x) = F'(x)$donc *G* est bien une primitive de *f* sur *I*.
Réciproquement, on suppose que *F* et *G* sont deux primitives de *f* sur *I*. Montrons alors qu'elles diffèrent d'une constante.
On note, $\forall x \in I\ \varphi(x) = F(x) - G(x)$ Puisque *F* et *G* sont dérivables sur *I*, la fonction $\varphi$ l'est aussi. Ainsi, $\forall x \in I\ \ \varphi'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$ $\varphi$ est donc une constante.
$\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in I, k = F(x) - G(x)$ et donc, toute primitive de *f* sur *I* s'écrit $G(x) = F(x) + k$

***Graphiquement :***

Pour une fonction *f* donnée, ses primitives diffèrent d'un nombre. Leurs représentations respectives sont des courbes superposables par translation. Il suffit de connaître l'image d'un nombre pour déterminer de manière unique une primitive ce qui induit la partie suivante.




## 4) ***Primitive avec condition initiale***

***Propriété :***

Soit *f* une fonction continue sur un intervalle *I*. $\forall x_0 \in I$ et $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ il existe une unique primitive *F* de *f* sur *I* telle que : $y_0 = F(x_0)$

***Démonstration :***

Soit *G* une primitive de *f* sur *I* et *F* une autre primitive de *f* sur *I*. On a prouvé que deux primitives d'une même fonction ne diffèrent que d'une constante.
$\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in I, F(x) = G(x) + k$. On choisit *k* afin que $y_0 = F(x_0)$
On a alors $y_0 = F(x_0) = G(x_0) + k$ soit donc $k = y_0 - G(x_0)$
Ainsi, *F* est la primitive de *f* sur *I* qui vérifie $y_0 = F(x_0)$

***Exemple :***

Déterminer la primitive de $f(x) = 5x^4 + 4x + 5$ qui s'annule en 2
*f* est définie sur ℝ. On a : $\forall x \in \mathbb{R}\ F(x) = x^5 + 2x^2 + 5x + k$. On remplace *x* par 2
$F(2) = 0 \Leftrightarrow 32 + 8 + 10 + k = 0 \Leftrightarrow k = -50$
$\forall x \in \mathbb{R}\ F(x) = x^5 + 2x^2 + 5x - 50$

## 5) Primitives et opérations

***Théorème :***

Soient *f* et *g* des fonctions continues sur un intervalle *I*. *F* et *G* des primitives de *f* et *g* sur *I*. Alors
• $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur *I*.
• $\forall k \in \mathbb{R}$, la fonction $kF$ est une primitive de $kf$ sur *I*.

***Remarque :***

- Il suffit de se rappeler que la dérivation est linéaire afin de démontrer ce théorème.
- Le *k* est appelé une constante multiplicative. Il n'a aucune influence dans le calcul de la primitive mais il ne doit pas être oublié.
- Lorsqu'on cherche une primitive, on utilisera le symbole intégral, noté $\int$ qui sera vu au chapitre sur les intégrales. La primitive de $x \mapsto 2x$ est $x \mapsto x^2$ s'écrit : $\int 2x dx = x^2$

## 6) Tableau des primitives usuelles

| Fonction *f* | Primitives de *f* sur | L'intervalle *I* |
|---|---|---|
| $x \mapsto a$ | $x \mapsto ax$ | $I = \mathbb{R}$ |
| $x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}$ | $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$. | $I = \mathbb{R}$ |
| $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ | $x \mapsto 2\sqrt{x}$ | $I = ]0; +\infty[$ |
| $x \mapsto \frac{1}{x^n}, n \geq 2$ | $x \mapsto \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$, | $I = ]0; +\infty[$ ou $I = ]-\infty; 0[$ |
| $x \mapsto \frac{1}{x}$ | $x \mapsto ln(x)$ | $I = ]0; +\infty[$ |
| $x \mapsto e^x$ | $x \mapsto e^x$ | $I = \mathbb{R}$ |
| $x \mapsto cos(x)$ | $x \mapsto sin(x)$ | $I = \mathbb{R}$ |
| $x \mapsto sin(x)$ | $x \mapsto -cos(x)$ | $I = \mathbb{R}$ |

## 7) Avec des fonctions composées

| Fonctions | Primitives | Condition de validité |
|---|---|---|
| $x \mapsto u'(x) \times v'(u(x))$ | $x \mapsto v(u(x))$ | *u* dérivable sur *I*, *v* dérivable sur *J* et $u(x) \in J$, pour tout *x* de *J*. |
| $x \mapsto u'(x) \times (u(x))^n, n \in \mathbb{N}$ | $x \mapsto \frac{(u(x))^{n+1}}{n+1}$. | *u* dérivable sur *I* |
| $x \mapsto \frac{u'(x)}{(u(x))^n}, n \geq 2$ | $x \mapsto \frac{-1}{(n-1)(u(x))^{n-1}}$, | *u* dérivable et ne s'annulant pas sur *I*. |
| $x \mapsto \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ | $x \mapsto 2\sqrt{u(x)}$ | *u* dérivable et strictement positive sur *I* |
| $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ | $x \mapsto ln\lvert u(x)\rvert$ | *u* dérivable et ne s'annulant pas sur *I* |
| $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ | $x \mapsto e^{u(x)}$ | *u* dérivable sur *I* |
| $x \mapsto u'(x) \times cos(u(x))$ | $x \mapsto sin(u(x))$ | *u* dérivable sur *I* |
| $x \mapsto u'(x) \times sin(u(x))$ | $x \mapsto -cos(u(x))$ | *u* dérivable sur *I* |

***Remarque :***

C'est clairement la première formule qu'il faut retenir car on trouve toutes les autres à partir de la primitive d'une fonction composée :
Dérivée de l'intérieur multipliée par la dérivée de la fonction appliquée à l'intérieur

## 8) *Exercices d'application*

### a) *Avec des fonctions usuelles*

Déterminer une primitive des fonctions ci-dessous.

- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 4x^3 + 6x - 12$
  $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = x^4 + 3x^2 - 12x + 7$
- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 5e^x + cos(x) + \pi$
  $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = 5e^x + sin(x) + \pi x$
- $\forall x \in ]0; +\infty[, f(x) = \frac{1}{x} + \frac{6}{\sqrt{x}} - 3x^5$
- $\forall x \in ]0; +\infty[, F(x) = ln(x) + 12\sqrt{x} - \frac{x^6}{2} - \sqrt{2}$
- $\forall x \in ]0; +\infty[, f(x) = \frac{1}{x^4} + x^4 - \frac{1}{x^6} + 3x^6$
- $\forall x \in ]0; +\infty[, F(x) = \frac{-1}{3x^3} + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{5x^5} + \frac{3}{7}x^7$

### b) *Avec des fonctions composées*

Déterminer une primitive pour chacune des fonctions ci-dessous.

- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (2x + 1)e^{x^2+x-3}$
  $f$ est de la forme $u'e^u$.
  On pose $u(x) = x^2 + x - 3$
  $u'(x) = 2x + 1$
  Alors $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = e^{x^2+x-3}$

- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -3cos(\pi - 3x)$
  $f$ est de la forme $u'cos(u)$.
  On pose $u(x) = \pi - 3x$
  $u'(x) = -3$
  Alors $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = sin(\pi - 3x)$

- $\forall x \in ]0; +\infty[, f(x) = \frac{ln(x)}{x}$
  $f$ est de la forme $u' \times u$.
  On pose $u(x) = ln(x)$
  $u'(x) = \frac{1}{x}$
  Alors $\forall x \in ]0; +\infty[, F(x) = \frac{(ln(x))^2}{2}$

- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}$
  $f$ est de la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$
  On pose $u(x) = x^4 + 1$
  $u'(x) = 4x^3$
  Alors $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{\sqrt{x^4+1}}{2}$

### c) *En transformant l'écriture*

On souhaite déterminer une primitive de : $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$

En l'état, $f$ ne rentre dans aucune formule… On doit transformer son écriture. On cherche trois réels $a$, $b$ et $c$ tels que, $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, f(x) = a + \frac{b}{(x-1)} + \frac{c}{(x-1)^2}$.

On appelle cela une décomposition en élément simple. En mettant au même dénominateur, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\},\ a + \frac{b}{(x-1)} + \frac{c}{(x-1)^2} = \frac{ax^2+(b-2a)x+(a-b+c)}{(x-1)^2}$

Par unicité de l'écriture, on obtient : $\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = 0 \\ a - b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2. \\ c = 1 \end{cases}$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, f(x) = 1 + \frac{2}{(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2}$

On a alors, $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, F(x) = x + 2ln|x - 1| + \frac{-1}{(x-1)}$

## 9) *Équations différentielles*

### a) *Introduction de la notion*

Il existe de nombreux domaines ou l'inconnue d'une équation n'est pas un nombre mais une fonction :

- Un mouvement rectiligne
- L'oscillation sans frottement d'une masse accrochée à un ressort.
- La vitesse verticale d'un parachutiste.
- La vitesse de désintégration des noyaux radioactifs.
- La vitesse d'accroissement des bactéries.
- L'intensité dans un circuit électrique RL (résistance et bobine)

***Définition :***

- Une équation différentielle est une égalité reliant une fonction et ses dérivées.
- Une solution d'une équation différentielle est une fonction qui vérifie cette égalité.

***Remarques :***

- Une équation différentielle possède une infinité de solution. L'équation donnée en introduction $(E): y' = e^x$ possède toutes les fonctions $x \mapsto e^x + k$ comme solutions.
- Si l'équation ne lie qu'une fonction et sa dérivée première, on dit qu'elle est du premier ordre.

***Exemple :***

En notant $N(t)$ le nombre de noyaux radioactifs présents dans un tissu à l'instant *t*, il existe un nombre $\lambda > 0$ tel que : $N'(t) = -\lambda N(t)$ . Cette équation est linéaire et du premier ordre. Le signe négatif traduit la décroissance du nombre de noyau dans le temps.

### b) *Résoudre une équation de la forme* $y' = ay$

***Propriété :***

Soit $a$ un réel non nul. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle du premier ordre à coefficients constants $(E): y' = ay$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax}, C \in \mathbb{R}$

***Démonstration :***

Il faut démontrer les deux sens de la propriété.

- Soit , $C \in \mathbb{R}$. La fonction $f_C(x) = Ce^{ax}$, définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
  On a : $\forall x \in \mathbb{R}, {f_C}'(x) = Cae^{ax}$. On a bien alors ${f_C}'(x) = af_C(x)$
  $f_C$ est donc une solution de l'équation différentielle $(E)$
- Soit maintenant $g$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de $(E)$.
  On pose $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = g(x)e^{-ax}$. $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a :
  $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = g'(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax}$ soit $h'(x) = e^{-ax}(g'(x) - ag(x))$
  Puisque $g$ est solution de $(E)$, on a :$\forall x \in \mathbb{R},, h'(x) = 0$.
  Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},, h(x) = C$.
  On a donc que si $g$ est solution de $(E)$, alors $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = Ce^{ax}$

***Exemple 1:***

On souhaite résoudre $(E): y' = 5y$ avec une condition initiale notée $y(0) = 7$
On reconnait $(E)$ de la même forme que ci-dessus. On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = Ce^{5x}$
On obtient donc une infinité de solution puisque $C$ est une constante qui peut prendre toutes les valeurs de $\mathbb{R}$.

Avec $y(0) = 7$, on obtient $7 = Ce^{5\times 0}$soit $C = 7$.
Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = 7e^{5x}$ est l'unique solution de $(E)$ qui vérifie $y(0) = 7$

***Exemple 2:***

On donne $(E): 6y' + 8y = 0$ ; Vérifier que $f(x) = e^{\frac{1-4x}{3}}$ est solution de $(E)$
On pourrait se ramener à une équation de la propriété mais ce n'est pas l'idée ici. C'est finalement un exercice de dérivation. $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{-4}{3}e^{\frac{1-4x}{3}}$
On injecte alors $6y' + 8y = 6 \times \frac{-4}{3}e^{\frac{1-4x}{3}} + 8 \times e^{\frac{1-4x}{3}} = 0$
$f$ est bien une solution de l'équation différentielle $(E): 6y' + 8y = 0$

***Propriété :***

Soient $f$ et $g$ deux solutions de $(E): y' = ay$.

- $f + g$ est aussi une solution de $(E)$
- $\forall k \in \mathbb{R}, kf$ est aussi une solution de $(E)$

***Remarque :***

On dit que toute combinaison linéaire de solution d'une équation différentielle est aussi une solution de la même équation.

***c) Résoudre une équation de la forme*** $y' = ay + b$

***Propriété :***

Soient $a$ et $b$ deux réels non nuls. On considère $(E): y' = ay + b$

- $(E)$ admet une solution particulière constante $x \mapsto \frac{-b}{a}$
- Les solutions de $(E)$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}, C \in \mathbb{R}$
- En posant une condition initiale $f(x_0) = y_0$, $(E)$ admet une unique solution $f$.

***Exemple :***

On souhaite résoudre $(E): y' = y + 1$ avec une condition initiale notée $y(0) = 1$
On reconnait l'équation étudiée ci-dessus. On a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = Ce^x - 1$
Puisque $f(0) = 1$, on a : $Ce^0 - 1 = 1$ soit $C = 2$. On a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2e^x - 1$

***d) Résoudre une équation de la forme*** $y' = ay + f$

***Propriété :***

Soient $a$ un réel non nul et $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$.
On considère $(E): y' = ay + f$ et $g$ une solution particulière de $(E)$ sur $I$.
Les solutions de $(E)$ sur $I$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax} + g(x), C \in \mathbb{R}$

***Remarque :***

- Il s'agit du cas général de l'équation traitée à la sous partie précédente.
- Il faut souvent une bonne dose de flair pour déterminer une solution particulière.

***Exemple :***

On souhaite résoudre $(E): y' = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x$ avec une condition initiale notée $y(2) = 0$
On recherche la solution particulière sous forme affine. On obtient $g(x) = -x - 2$
On a donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = Ce^{\frac{1}{2}x} - x - 2$. On détermine la constante à l'aide de la condition initiale. $y(2) = 0 \Leftrightarrow Ce^1 - 2 - 2 = 0 \Leftrightarrow C = \frac{4}{e}$. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 4e^{\frac{1}{2}x-1} - x - 2$

***Remarque :***

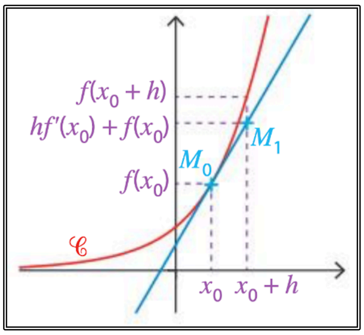
On pourrait généraliser cet exemple à $(E): y' = ay + mx + p$
On chercherait une fonction affine particulière qui vérifierai l'équation.
On collerait alors la solution particulière à la solution générale

## *10) Application*

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$, $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative et $M_0(x_0, y_0)$ un point de $(\mathcal{C})$.
La courbe de $f$ peut être approchée en $M_0$ par sa tangente.
Soit $h$ un nombre réel non nul, on a alors l'approximation suivante, dite approximation d'Euler :

$$f(x_0 + h) \approx hf'(x_0) + f(x_0)$$

On peut reconnaitre le nombre dérivé avec $h$ très petit.




### *Exemple 1:*

On donne l'équation différentielle : $(E)$: $y' = \frac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$ avec $f(1) = 0$. On peut obtenir des approximations telles que :
$f(1+h) \approx h$ puis $f(1+2h) = f(1+h+h) \approx h\frac{1}{1+h} + f(1+h)$
Pour l'équation : $(E)$, on connait la solution. Il s'agit de la fonction logarithme népérien. En appliquant le code avec $a = 2$, on obtient une valeur approchée de $ln(2)$.

```
def euler1(a,h):
    x = 1
    y = 0
    while x<a:
        x = x+h
        y = y+h/x
    return y
```

```
> euler1(2,0.00001)
0.6931446805649328
```

### *Exemple 2 :*

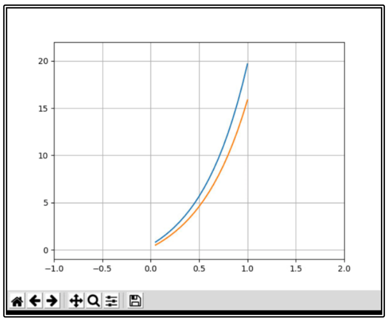
On s'intéresse maintenant à l'équation $(E)$: $y' = 2y + 5$.
On souhaite représenter différentes solutions de cette équation sur $[0; 1]$ à l'aide de la méthode d'Euler vue ci-dessus.
Soit $f$ la solution de cette équation telle que $f(0) = 0{,}5$.
Soit $n$ un entier naturel supérieur à 2, on a :
$\forall k \in [|0; n|], x_k = \frac{k}{n}$ et $y_k = f\left(\frac{k}{n}\right)$
En utilisant l'approximation d'Euler, on a :

$$\forall k \in [|0; n-1|], y_{k+1} \approx \frac{n+2}{n} y_k + \frac{5}{n}.$$

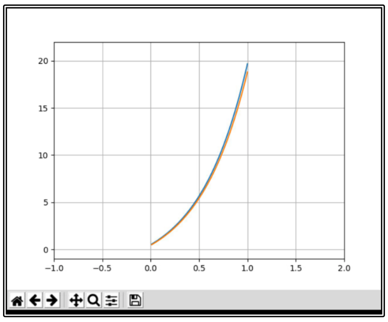
On va tracer la solution de l'équation différentielle obtenue par le calcul ainsi que celle construite par l'approximation d'Euler.

```
from math import exp
import matplotlib.pyplot as pl

def euler2(n):
    y = [0.5]
    for k in range(1,n):
        y.append((n+2)/n*y[k-1]+5/n)
    return y

def representation(n):
    X =[]
    Y =[]
    for i in range(1,n+1):
        X.append(i/n)
        Y.append(3*exp(2*i/n)-5/2)
    pl.axis([-1,2,-1,22])
    pl.grid()
    pl.plot(X,Y)
    pl.plot(X,euler2(n))
    pl.show()
```

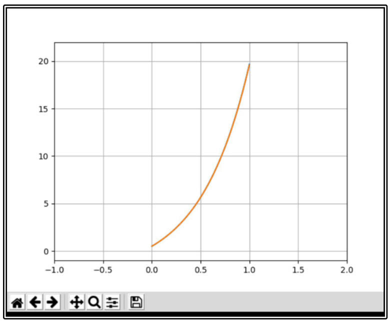
$(E)$: $y' = 2y + 5$ admet pour solution : $\forall x \in [0; 1], f(x) = 3e^{2x} - \frac{5}{2}$
On donne ci-dessous trois aperçus obtenus avec le programme. On voit bien que plus la subdivision est petite, plus la fonction obtenue par approximation se rapproche de la solution. Pour $n = 1000$, la fonction obtenue avec des valeurs approchées s'efface sous la solution.




```
> representation(20)
```




```
> representation(100)
```




```
> representation(1000)
```