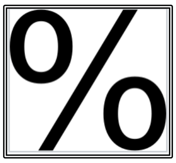
Pourcentages et évolutions

Capacités attendues en fin de chapitre :

- Exploiter la relation entre effectifs, proportions et pourcentage.
- Traiter des situations simples mettant en jeu des pourcentages de pourcentages.
- Taux d'évolution, taux d'évolution global, taux d'évolution réciproque.

Le mathématicien du chapitre :



Dans les textes du moyen âge, on trouve des notations comme « per cento » Selon David Eugène Smith, la première trace d'un symbole ressemblant à celui utilisé de nos jours se trouve dans un manuscrit italien anonyme écrit vers 1425 sous la forme $p.\frac{0}{0}$. Le p a disparu et la barre est devenue oblique.

1) Calculs avec des pourcentages

- Alain a joué 25 fois à pile ou face et a obtenu 44 % de pile. Combien de fois la pièce est-elle tombée sur pile ?

Nombre de lancers	100	25
Nombre de pile	44	11

44 % signifie que si Alain avait lancé 100 fois la pièce, il aurait obtenu 44 piles.
On utilise donc les règles de la proportionnalité afin de compléter le tableau.
Il a donc obtenu 11 fois piles sur ses 25 lancers.

Règle de calcul :

Prendre le pourcentage d'un nombre, c'est multiplier ce nombre par ce pourcentage

Remarque :

D'une manière générale, on recherche dans l'énoncé la préposition « de » afin de mettre en évidence la multiplication. Dans l'exemple ci-dessus, on aurait pu se passer du tableau en calculant : $\frac{44}{100} \times 25 = 11$

- En 2009, 75 femmes siégeaient au Sénat parmi les 339 sénateurs et à l'assemblée nationale, on comptait 107 femmes parmi les 577 députés. Dans laquelle des deux assemblées, le pourcentage de femme était-il le plus élevé ?

On complète les deux tableaux ci-dessous en prenant soin de noter convenablement la légende.

Sénateurs	339	100
Femmes	75	22,12

Députés	577	100
Femmes	107	18,54

La recherche du pourcentage s'effectue en se posant la question suivante :
Si le Sénat comptait 100 sénateurs, combien y aurait-il de sénatrices ?
On obtient donc 22,12 % de sénatrice et 18,54 % de députées.

- Un club sportif réunit 50 filles et 75 garçons. 70 % des filles et 80 % des garçons ont réussi un test d'endurance. Quel pourcentage de sportif du club a réussi ce test ?

Ce n'est évidemment pas la somme des deux pourcentages (150 % n'aurait aucun sens) ni la moyenne simple des deux pourcentages qui permet d'obtenir la réponse.
Il faut pondérer le pourcentage de chaque groupe en fonction de son effectif. On effectue le calcul $\frac{50 \times 70 + 75 \times 80}{50+75} = 76\%$
On obtient donc 76 % de sportif qui ont réussi

Remarque :

On aurait aussi pu calculer le nombre de garçons et le nombres de filles ayant réussis puis faire le pourcentage sur le groupe complet mais cela induit bien plus de calcul.

2) Taux d'évolution

a) Exemples introductifs

- Un pantalon a vu son prix passer de 90 euros à 103,5 euros. Déterminer le pourcentage d'augmentation, aussi appelé taux d'évolution.

Ancien prix (euros)	90	100
Nouveau prix (euros)	103,5	115

On observe un coefficient de proportionnalité de 1,15. Le prix a donc subi une augmentation de 15 %, en passant de 100 à 115.

- Une voiture, vendue initialement 9500 euros est bradée au prix de 8550 euros. Déterminer le taux d'évolution.

Ancien prix (euros)	9500	100
Nouveau prix (euros)	8550	90

On observe un coefficient de proportionnalité de 0,9. Le prix a donc subi une diminution de 10 %, en passant de 100 à 90.

Remarque :

On dit qu'on a exprimé les évolutions en fonction des indices.

b) Évolution exprimée en pourcentage

Propriété et définition :

t désigne un nombre positif ou négatif.

Si une évolution de t % fait passer le nombre V_D à V_A, on a alors : $V_A = \left(1 + \frac{t}{100}\right) V_D$

On dit alors que $1 + \frac{t}{100}$ est le coefficient multiplicateur pour passer de V_D à V_A

Exemple :

Un tableau coûte 1200 Euros. Lors d'une vente aux enchères, son prix augmente de 25 %. Son nouveau prix est donc donné par : $V_A = \left(1 + \frac{25}{100}\right) \times 1200$ soit $V_A = 1500$ €

Le coefficient multiplicateur est ici de 1,25.

Remarque :

On ne dit pas une baisse de « -10 % » mais une baisse de 10 % ou une évolution de « -10 % ».

Propriété :

Si le coefficient multiplicateur est supérieur à 1, alors l'évolution est une augmentation.
Si le coefficient multiplicateur est inférieur à 1, alors l'évolution est une diminution.

Exemples :

- Augmenter une quantité de 20 %, c'est multiplier par 1,2
- Augmenter une quantité de 3 %, c'est multiplier par 1,03
- Diminuer une quantité de 17 %, c'est multiplier par 0,83
- Augmenter une quantité de 200 %, c'est multiplier par 3

c) Taux d'évolution

Propriété :

On suppose $V_D \neq 0$; Lorsqu'on passe de V_D à V_A, le taux d'évolution est donné par $\frac{V_A - V_D}{V_D}$

Remarque :

Dans le langage courant : « valeur d'arrivée moins valeur de départ sur valeur de départ »

Démonstration :

On note t % le taux d'évolution pour passer de V_A à V_D, on a alors : $V_A = \left(1 + \frac{t}{100}\right) V_D$

En supposant la valeur de départ non nul $1 + \frac{t}{100} = \frac{V_A}{V_D}$ soit $\frac{t}{100} = \frac{V_A}{V_D} - 1$

On a donc $\frac{t}{100} = \frac{V_A - V_D}{V_D}$ soit alors $t = \frac{V_A - V_D}{V_D} \times 100$

Exemple :

En reprenant les exemples introductifs, On obtient :

- Pour le pantalon, $\frac{103{,}5-90}{90} = +0{,}15$ soit une évolution de 15 %
- Pour la voiture, $\frac{8550-9500}{9500} = -0{,}10$ soit une évolution de - 10 %

Exercice :

Un trombone à coulisse a son prix affiché à 3700 €. Devant le peu de clients, son prix est soldé à 2960 €

Il s'agit donc d'une baisse. On calcule le taux d'évolution globale : $\frac{2960-3700}{3700} = -0{,}20$

Le prix a donc diminué de 20 %

3) Évolutions successives, évolution réciproque

a) Évolutions successives

Exemples introductifs :

Lors de la période des soldes, une bijouterie décide de solder tous ses bijoux de 20 % au cours de la première démarque. Devant le peu de succès de ses ventes, elle décide d'effectuer une nouvelle démarque de 30 % après quinze jours de solde. Quel est donc le pourcentage de remise global ?

Il s'agit donc de deux baisses successives. Il est inutile de connaitre des prix afin de déterminer le taux d'évolution global.

On effectue : $\left(1 - \frac{20}{100}\right) \times \left(1 - \frac{30}{100}\right) = 0{,}56$ que l'on peut écrire $\left(1 - \frac{44}{100}\right)$

Deux baisses successives de 20 puis de 30 pourcents correspondent donc à une baisse de 44 %

Remarque :

De trop nombreuses personnes pensent que le résultat donne 50 % mais on n'ajoute pas les pourcentages. En effet, la deuxième baisse ne s'applique plus au prix de départ.

Au cours du mois de mars, les prix des carburants ont augmenté de 1,5 % puis ont diminué de 0,9 % au cours du mois d'avril. Quel est le taux d'évolution global ?

Il s'agit donc successivement d'une augmentation puis d'une baisse.

On calcule alors : : $\left(1 + \frac{1{,}5}{100}\right) \times \left(1 - \frac{0{,}9}{100}\right) = 1{,}005865$ que l'on peut écrire $\left(1 + \frac{0{,}5865}{100}\right)$

Cela correspond donc à une augmentation de 0,58 %

Remarque :

- Il est difficile de savoir à l'avance si le taux d'évolution global d'une hausse et d'une baisse correspond finalement à une augmentation ou à une diminution.
- L'ordre des opérations n'aucune importance sur le résultat final puisque la multiplication est commutative.

Un salarié est augmenté tous les mois de 1 % au cours de l'année 2019. Quelle est son augmentation annuelle ?

Évidemment, la réponse n'est pas 12 %... On calcule :$\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{12} = 1{,}126825$

Il est donc augmenté de 12, 68 % sur l'année 2019.

Propriété :

Si le taux d'évolution de V_0 à V_1 est de t_1 % et si le taux d'évolution de V_1 à V_2 est de t_2 % alors le taux d'évolution global pour passer de V_0 à V_2 est donné par :

$$1+\frac{t}{100}=\left(1+\frac{t_1}{100}\right)\times\left(1+\frac{t_2}{100}\right)$$

Remarque :

On peut aussi écrire : $t=\left[\left(1+\frac{t_1}{100}\right)\times\left(1+\frac{t_2}{100}\right)-1\right]\times 100$ mais cette écriture est moins intuitive. Il est plus simple de calculer le coefficient multiplicateur puis d'en déduire le taux d'évolution global.

Exemple :

D'après l'INSEE, entre 2008 et 2009, le SMIC a augmenté de 1,26 %. Il a aussi augmenté de 0,45 % entre 2009 et 2010. Déterminer le taux d'évolution global entre 2008 et 2010.
On applique naturellement la formule : $\left(1+\frac{1{,}26}{100}\right)\times\left(1+\frac{0{,}45}{100}\right)=1{,}0171567$
Soit alors une augmentation de 1,72 % en deux ans.

b) Évolution réciproque

Exemple introductif :

Un loueur augmente de 8 % le prix de son appartement. Devant le peu de demande, il doit se résoudre à baisser sa location. Quel est le pourcentage de baisse à appliquer pour revenir au prix initial ?
Si la baisse était de 8 %, il ne reviendrait pas au prix de départ car il appliquerait ces 8 % à un nombre plus grand.
C'est la notion d'inverse qui apparait ici. Il faut effectuer l'opération contraire de « multiplier par $1+\frac{8}{100}=1{,}08$ » est « diviser par 1,08 »
Prenons un exemple numérique : Si la location est de 700 €, le prix après augmentation est de 756 €. En effectuant l'opération $\frac{756}{1{,}08}$, on revient à 700 €.
De trop nombreuses personnes pensent qu'il faut faire $756\times\left(1-\frac{8}{100}\right)=695{,}52$ oups !

Propriété :

Si le taux d'évolution de V_0 à V_1 est de t %, alors le taux d'évolution réciproque t' % de V_1 à V_0 est donné par : $1+\frac{t'}{100}=\frac{1}{1+\frac{t}{100}}$

Démonstration :

On écrit la relation : $V_1=\left(1+\frac{t}{100}\right)\times V_0$ soit en inversant l'égalité : $V_0=\left(\frac{1}{1+\frac{t}{100}}\right)\times V_1$

Remarque :

La recherche d'un taux d'évolution réciproque s'apparente à celle d'un antécédent en effectuant l'opération réciproque.

Exercice :

Lors de la cotation de mardi à la bourse de Paris, une action a augmenté de 5 %. Le mercredi soir, elle avait retrouvé son cours d'origine. Quelle est le pourcentage de baisse du mercredi.

On applique donc la formule $1+\frac{t'}{100}=\frac{1}{1+\frac{5}{100}}$ soit $t'=\left(\frac{1}{1+\frac{5}{100}}-1\right)\times 100$ soit $t'=-4{,}76$