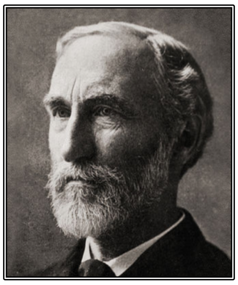
Orthogonalité dans l'espace

Capacités attendues en fin de chapitre :

- Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, pour calculer un angle, une longueur de l'espace.
- Utiliser la projection orthogonale pour déterminer la distance d'un point à une droite ou à un plan.
- Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs.
- Étudier des problèmes de configuration de l'espace. Orthogonalité, plan médiateur.
- Déterminer l'équation cartésienne d'un plan dont on connait un point et un vecteur normal.
- Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur un plan donné par une équation cartésienne.
- Traduire par un système d'équations linéaires des problèmes de types intersection ou orthogonalité de droites ou de plan.

Le mathématicien du chapitre :



Josiah Willard Gibbs (1839 –1903) est un physicien et mathématicien américain. Il fut un des fondateurs de l'analyse vectorielle en mathématiques. Ses travaux en physique l'amenèrent à introduire les notions enseignées aujourd'hui telles que le produit scalaire ou le produit vectoriel. Il se rendit compte de la similitude de ses travaux avec ceux de Grassmann et entreprit alors de mieux faire connaitre son œuvre qui était antérieure.

1) Produit scalaire dans l'espace

En classe de première, vous avez appris une nouvelle notion, le produit scalaire qui mélange géométrie et calculs algébriques. Le produit scalaire va ici basculer dans l'espace.

a) Extension du produit scalaire

Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On considère les points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. 3 points de l'espace étant coplanaires, le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$ est le réel $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ calculé dans un plan contenant les points A, B et C.

Remarque :

$\vec{u}.\vec{v}$ ne dépend pas des représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ choisi.

Expression géométrique du produit scalaire :

Soient A, B et C trois points de l'espace, B et C étant distincts de A.
On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Alors, $\vec{u}.\vec{v} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times cos(\widehat{BAC})$

Remarque :

La connaissance des normes et de l'angle permet de déterminer le produit scalaire.

Projection orthogonale :

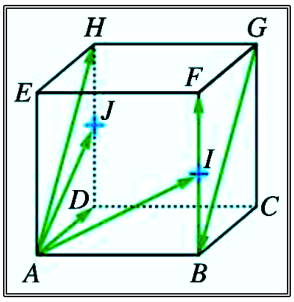
Soient A, B et C trois points de l'espace, et H le projeté orthogonal de C sur (AB) . Alors :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens.
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraire.

Définition

Pour tout vecteur $\vec{u}$, on définit sa norme par : $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = \sqrt{\vec{u}^2}$
La norme est donc toujours un nombre positif.

Exercice :

On considère le cube ci-contre $ABCDEFGH$ de côté a. I est le milieu de $[BF]$ et J est le milieu de $[DH]$. Déterminer les produits scalaires suivants.



- $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AJ}$
- $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{GB}$
- $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BF}$
- $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BF}$

Solution :

- $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD} = a^2$car D est le projeté orthogonal de J sur (AD)
- $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{GB} = -\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AH} = -2a^2$ à l'aide du théorème de Pythagore.
- $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AE} = \sqrt{2a^2} \times a \times cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = a^2$
- $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AE}$. On note K le projeté orthogonal de I sur (AE)
- $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AE} = \ a \times \frac{a}{2} = \frac{a^2}{2}$

Cependant, pour effectuer d'autres calculs, des propriétés algébriques sont nécessaires.

b) Propriétés algébriques du produit scalaire

Toutes les propriétés du produit scalaire dans le plan sont conservées dans l'espace.

Définition

Soient trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et k un réel. On a les propriétés suivantes :

- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ symétrie du produit scalaire.
- $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v}` + \vec{u}.\vec{w}$ et $\vec{u}.(k\vec{v}) = (k\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v})$ bilinéarité
- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Exercice :

Sur le cube ci-dessus, déterminer les produits scalaires $\overrightarrow{GD}.\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{ED}$.
On utilise la relation de Chasles.

- $\overrightarrow{GD}.\overrightarrow{GB} = \left(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CD}\right).\left(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CB}\right) = a^2 + 0 + 0 + 0 = a^2$
- $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{ED} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right).\left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD}\right) = 0 + 0 + 0 + a^2 = a^2$

c) Vecteurs orthogonaux

Définition :

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul.

Cohérence de la définition

- Supposons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls. Alors $\|\vec{u}\| \neq 0$ et $\|\vec{v}\| \neq 0$. On a ainsi :
  $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\theta) = 0 \Leftrightarrow cos(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}(\pi)$
  Les directions des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc orthogonales
- Comme $\vec{u}.\vec{0} = 0.\vec{u} = 0$ alors le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur du plan

2) *Orthogonalité dans l'espace*

a) *Orthogonalité de deux droites de l'espace*

Définition :

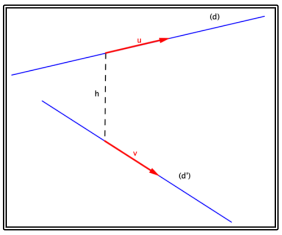
Soient (d) et (d') deux droites de l'espace. (d) et (d') sont orthogonales si un vecteur directeur de l'une est orthogonal à un vecteur directeur de l'autre.

Propriété :

Deux droites (d) et (d') de l'espace sont orthogonales si et seulement si tout vecteur directeur de (d) est orthogonal à tout vecteur directeur de (d').

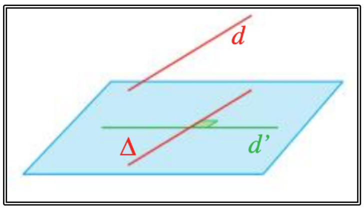
Remarques :

- Deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires.
- Deux droites sont perpendiculaires si et seulement si elles sont sécantes selon un angle droit.
- Si deux droites de l'espace sont perpendiculaires, alors elles sont orthogonales. La réciproque est fausse.



Propriétés :

Deux droites (d) et (d') sont orthogonales si et seulement s'il existe une droite (Δ)parallèle à (d) et perpendiculaire à (d').
Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.



Remarque :

Le produit scalaire, associé à la relation de Chasles, permet de démontrer l'orthogonalité de droites de l'espace.

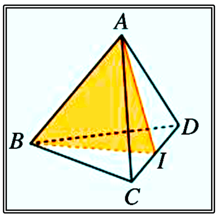
b) *Orthogonalité d'une droite et d'un plan*

Définition :

Une droite de l'espace, dirigée par $\vec{u}$, est orthogonale à un plan si $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan.

Exercice :

$ABCD$ est un tétraèdre régulier (toutes les faces sont des triangles équilatéraux) et le point I est le milieu du segment $[CD]$
Montrer que (CD) est orthogonale au plan (ABI).

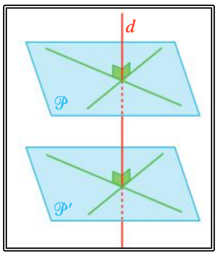


Solution :

BCD est un triangle équilatéral donc (BI) est la hauteur relative à (CD). Ainsi (BI) et (CD) sont perpendiculaires. De la même manière et pour les mêmes raisons, dans le triangle ACD, (AI) et (CD) sont perpendiculaires.
(CD) est donc orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABI).

Propriétés :

- Si deux plans sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.
- Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont parallèles entre eux.



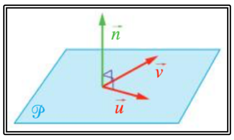
3) Vecteur normal et projeté orthogonal

a) Vecteur normal à un plan

En classe de première, on a introduit la notion de vecteur normal à une droite, vecteur orthogonal au déplacement. On va le généraliser à l'espace.

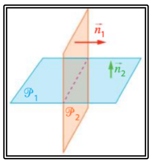
Définition :

Soit $(\mathcal{P})$ un plan de base $(\vec{u}, \vec{v})$. Un vecteur $\vec{n}$ est normal à $(\mathcal{P})$ s'il est non nul et s'il est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$



Définition :

Soit $(\mathcal{P}_1)$ un plan de vecteur normal $\vec{n}_1$ et $(\mathcal{P}_2)$ un plan de vecteur normal $\vec{n}_2$.
Alors $(\mathcal{P}_1)$ est perpendiculaire à $(\mathcal{P}_2)$ si $\vec{n}_1$ est orthogonal à $\vec{n}_2$



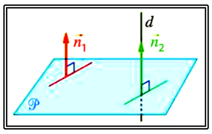
Remarques :

- Cela n'a aucun sens de parler de plans orthogonaux.
- Si deux vecteurs sont normaux à un même plan, ils sont colinéaires.
- Le vecteur normal n'est pas unique.
- Un plan est entièrement déterminé par la donnée d'un point et d'un vecteur normal.

b) Droites et plans de l'espace

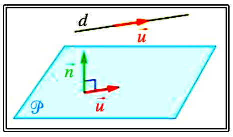
Propriété :

Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si son vecteur directeur est colinéaire à un vecteur normal de ce plan.



Propriété :

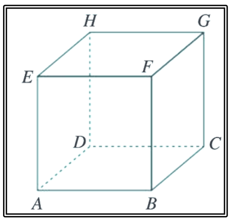
Une droite est parallèle à un plan si et seulement si son vecteur directeur est orthogonal à un vecteur normal de ce plan.



Exemple :

Sur le cube $ABCDEFGH$ ci-contre :

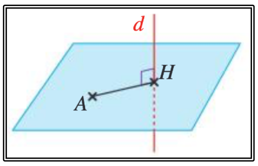
- $\overrightarrow{EA}$ est normal à (ABC) donc toutes les arêtes verticales sont perpendiculaires à (ABC)
- Toutes les arêtes horizontales sont donc parallèles à (ABC).



c) Projeté orthogonal d'un point sur un objet

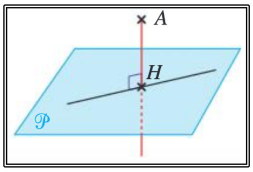
Définition :

Soit A un point et (d) une droite de l'espace. Il existe un unique plan passant par A et orthogonal à (d). La droite (d) est alors sécante à ce plan et leur seul point d'intersection est appelé le projeté orthogonal de A sur (d), noté H.



Définition :

Soit A un point et $(\mathcal{P})$ un plan de l'espace. Il existe une unique droite passant par A et orthogonale à $(\mathcal{P})$. Le plan $(\mathcal{P})$ est alors sécant avec cette droite et leur seul point d'intersection est appelé le projeté orthogonal de A sur $(\mathcal{P})$, noté H.



Exemple :

Sur le cube ci-dessus, G est le projeté orthogonal de H sur (FBC)
Sur le cube ci-dessus, C est le projeté orthogonal de A sur (GC)

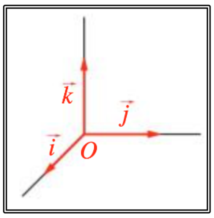
4) *Calculs de distance*

C'est la partie préférée des élèves. Beaucoup de calculs algébriques qui les rassurent…

a) *Repère orthonormé de l'espace*

Définition :

Une base orthonormée de l'espace est une base telle que les trois vecteurs soient orthogonaux deux à deux et tous de norme 1.
Un repère orthonormé $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ est un repère de l'espace tel que $\left(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ soit une base orthonormée de l'espace



Remarque :

Le trièdre de Frenet est une base de l'espace.

Exemple :

Sur le cube de la page précédente d'arête 1, $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ est un ROND de l'espace.
Dans toute la suite du cours, on se place dans $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, ROND de l'espace.

b) *Expression analytique du produit scalaire*

Expression analytique du produit scalaire :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$, alors on a :
$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

Tester l'orthogonalité :

```python
from math import *
def orthogonaux(Xu,Yu,Zu,Xv,Yv,Zv):
    produit = Xu*Xv+Yu*Yv+Zu*Zv
    if produit==0:
        return("vecteurs orthogonaux")
    else:
        return("vecteurs non orthogonaux")
```

```
> orthogonaux(1,2,3,4,5,6)
'vecteurs non orthogonaux'
> orthogonaux(1,3,4,1,5,-4)
'vecteurs orthogonaux'
```

$\vec{u}(1;3;4)$ et $\vec{v}(1;5;-4)$ sont orthogonaux.

Cas particulier :

On peut obtenir la norme du vecteur $\vec{u}(x;y;z)$ par :$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Corollaire :

Soient $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ deux points de l'espace. On a alors :
$AB = \sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+(z_A-z_B)^2}$

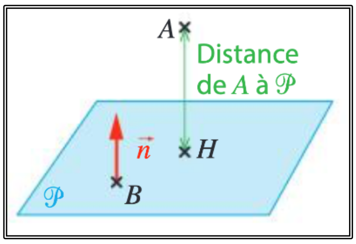
Exemple :

On donne les points de l'espace $A(1;3;1)$ et $B(2;-5;4)$. On trouve alors la longueur du segment $AB = \sqrt{1^2+8^2+3^2} = \sqrt{74}$. C'est aussi la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

c) *Distance d'un point à un plan*

Définition :

Soit A un point de l'espace et $\mathcal{P}(B,\vec{n})$.
Le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$ est H, point de $\mathcal{P}$ le plus proche de A. AH est la distance de A au plan $\mathcal{P}$
On a la formule :$AH = \frac{|\overrightarrow{AB}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$



Exercice :

On donne $A(1\,;3\,;1)$ et $B(2\,;-5\,;4)$ et $\mathcal{P}(B,\vec{n}) : 5x+4y+2z+2=0$
Déterminer la distance du point A au plan $\mathcal{P}$.

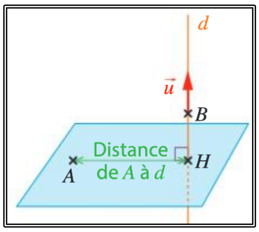
Solution :

On exhibe $\vec{n}(5;4\,;2)$ soit alors $\|\vec{n}\| = \sqrt{45}$. On vérifie bien que B soit sur $\mathcal{P}$.
On évalue $\overrightarrow{AB}(1\,;-8\,;3)$. On calcule alors $\overrightarrow{AB}.\vec{n} = 5-32+6 = -21$
On a donc $AH = \frac{|-21|}{3\sqrt{5}}$ soit en rendant rationnel $AH = \frac{7\sqrt{5}}{5}$
La valeur absolue est importante car une distance est toujours positive.

d) Distance d'un point à une droite

Définition :

Soit A un point de l'espace et $\mathcal{D}(B,\vec{u})$.
Le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$ est H, point de $\mathcal{D}$ le plus proche de A.
AH est la distance de A à la droite $\mathcal{D}$.
On a la formule :$AH = \left\|\overrightarrow{AB} - \frac{\overrightarrow{AB}.\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}\right\|$



Remarque :

Cette formule est clairement imbuvable mais a le mérite d'exister… On sent la construction du vecteur $\overrightarrow{AH}$ par la relation de Chasles.

5) Équations cartésiennes

a) Équation cartésienne d'un plan

Théorème :

Toute équation de la forme : $ax+by+cz+d=0$ (avec a, b et c non tous nuls) est celle d'un plan $\mathcal{P}(\vec{n})$ de vecteur normal $\vec{n}(a;b\,;c)$.
Une telle équation est appelée une ***équation cartésienne d'un plan***.

Démonstration :

- On suppose que $M(x\,;y\,;z)$ appartient au plan $\mathcal{P}(A\,;\vec{n})$ passant par $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a\,;b\,;c)$.
  $A(x_A\,;y_A\,;z_A) \in \mathcal{P}(A;\vec{n})$ et $M(x;y;z) \in \mathcal{P}(A;\vec{n}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$
  $a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A) = 0$ soit $ax+by+cz+(-ax_A-by_A-cz_A) = 0$

En posant $d = -ax_A - by_A - cz_A$, les coordonnées du point M vérifient bien l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}(\vec{n})$.

- Réciproquement, montrons que l'ensemble des points M dont les coordonnées vérifient $ax+by+cz+d=0$ sont sur un plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(a\,;b\,;c)$
  On note F l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ vérifiant $ax+by+cz+d=0$
  Nous devons effectuer une disjonction de cas :
  - Si $a \neq 0$, alors $A\left(\frac{-d}{a}\,;0\,;0\right) \in F$. On pose $\vec{n}(a\,;b\,;c)$,
    $\forall M(x\,;y\,;z) \in F$, on a : $\overrightarrow{AM}\left(x+\frac{d}{a};y\,;z\right)$. $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = a\left(x+\frac{d}{a}\right)+by+cz$. Avec l'hypothèse initiale, on obtient $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux. $M \in \mathcal{P}(A;\vec{n})$
  - Si $a = 0$ et $b \neq 0$, on choisit alors $A\left(0;\frac{-d}{b}\,;0\right) \in F$ et on procède de la même manière que précédemment.
  - Enfin, si $a = 0$ et $b = 0$, alors $c \neq 0$ car les coefficients sont non tous nuls. On pose de la même manière $A\left(0;0;\frac{-d}{b}\right) \in F$ et on recommence…

Exercice :
Dans un repère orthonormé, on donne le point $A(2\,;1\,;-3)$ et le vecteur $\vec{n}(1;1\,;2)$
Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}(A;\vec{n})$

Solution :

On remplace les coordonnées de $\vec{n}$ dans l'équation $ax+by+cz+d=0$. On obtient donc une équation qui s'écrit : $x+y+2z+d=0$. On remplace par les coordonnées du point A afin de déterminer la valeur de d. $2+1+2\times(-3)+d=0$ soit $d=3$
Le plan a pour équation : $\mathcal{P}(A;\vec{n}): x+y+2z+3=0$

Exercice :
Soient les points $A(-1\,;2\,;-3)$, $B(1\,;-1\,;1)$ et $C(1\,;2\,;3)$. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

Solution :
On vérifie d'abord que les points ne sont pas alignés. Pour cela, on calcule les coordonnées des deux vecteurs : $\overrightarrow{AB}(2;-3\,;4)$ et $\overrightarrow{AC}(2;0\,;6)$. Les vecteurs n'étant pas colinéaires, les trois points définissent bien un plan de l'espace. On pourrait essayer de chercher un vecteur normal aux deux vecteurs qui dirigent le plan mais cette démarche peut s'avérer infructueuse sans flair… Pour info $\vec{n}(9;2\,;-3)$
On va donc résoudre un système de trois équations à trois inconnues en utilisant A, B et C.
On décide de poser $d=1$ On suppose donc que le plan ne passe pas par l'origine.

$$\begin{cases}-a+2b-3c+1=0\\ a-1b+1c+1=0\\ 1a+2b+3c+1=0\end{cases},a\in\mathbb{R},b\in\mathbb{R},c\in\mathbb{R}\text{ soit }\begin{cases}-a+2b-3c=-1\\ a-b+c=-1\\ a+2b+3c=-1\end{cases}$$

On peut utiliser les méthodes vues en seconde pour résoudre un système de 3 équations à 3 inconnues ou utiliser la calculatrice.

$$\begin{cases}a-2b+3c=1 & L_1\longleftarrow -L_1\\ b-2c=-2 & ,L_2\longleftarrow L_1+L_2\\ a+2b+3c=-1 & L_3\longleftarrow L_1+L_3\end{cases}\text{ soit donc }\begin{cases}a=\frac{-9}{4}\\ c=\frac{3}{4}\\ b=\frac{-1}{2}\end{cases}.$$

Ainsi (ABC): $\frac{-9}{4}x+\frac{-1}{2}y+\frac{3}{4}z+1=0$ qui devient alors : (ABC): $9x+2y-3z-4=0$
Pour vérification, on peut exhiber $\vec{n}(9;2\,;-3)$ et on a bien que $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$
Il existe une notion mathématique qui permet de déterminer un vecteur orthogonal à deux vecteurs de l'espace : C'est le produit vectoriel. Bien que cette notion ne soit pas au programme, on peut déterminer à l'aide d'un code Python un vecteur normal.

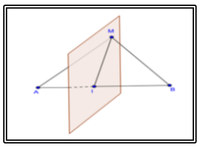
```
from math import *
def normal(Xu,Yu,Zu,Xv,Yv,Zv):
  x=Yu*Zv-Yv*Zu
  y=Zu*Xv-Xu*Zv
  z=Xu*Yv-Yu*Xv
  print("vecteur normal=",(x,y,z))
```

```
> normal(2,-3,4,2,0,6)
vecteur normal= (-18, -4, 6)
```

On trouve un vecteur multiple au $\vec{n}$ ci-dessus mais qui est bien normal au plan.

b) *Plan médiateur à un segment*

Définition :
Le plan médiateur $(\mathcal{P})$ d'un segment $[AB]$ est l'unique plan passant par le milieu I de $[AB]$ et orthogonal à la droite (AB)



Remarque :
C'est la notion de médiatrice transposée à l'espace.

Théorème :
Le plan médiateur $(\mathcal{P})$ d'un segment $[AB]$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que : $MA = MB$. M est donc équidistant des points A et B.

Exemple :

On donne les points $A(4\,;0\,;-3)$ et $B(2\,;2\,;2)$. Donner une équation cartésienne du plan médiateur de $[AB]$.

Solution :

On détermine $\overrightarrow{AB}(-2;2\,;5)$ et $I\left(3\,;1\,;-\frac{1}{2}\right)$. $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal au plan médiateur.

On a donc : $(\mathcal{P}): -2x + 2y + 5z + d = 0$. En remplaçant par les coordonnées de I, on obtient : $(\mathcal{P}): -2x + 2y + 5z + \frac{13}{2} = 0$

c) Équation cartésienne d'une sphère

Théorème :

Dans un repère orthonormé, la sphère $(\mathcal{S})$, de centre $\Omega(x_\Omega\,; y_\Omega\,; z_\Omega)$ et de rayon r, admet pour équation : $\mathcal{S}(\Omega, r): (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = r^2$

Démonstration

L'ensemble des points de l'espace qui sont sur la sphère sont à égale distance du centre. Soit $M(x\,;y\,;z)$ un point de la sphère ; on écrit donc $\Omega M = r$

$\Omega M = \sqrt{(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2}$ soit $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = r^2$

Exemple :

Déterminer une équation cartésienne de la sphère de centre $\Omega(-2\,;2\,;1)$ et de rayon $r = \sqrt{5}$

Solution :

On remplace dans l'expression : $(\mathcal{S}): (x + 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 5$ puis on développe : $(\mathcal{S}): x^2 + 4x + y^2 - 4y + z^2 - 2z + 4 = 0$

Remarque :

Il arrive fréquemment que l'on ait une équation développée de la sphère. Il faut donc utiliser la forme canonique afin de retrouver centre et rayon.

Théorème :
Soit A et B deux points distincts de l'espace. La sphère de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

Exercice :

On donne les points $A(2\,;4\,;1)$ et $B(0\,;-2\,;3)$.

1. Déterminer une équation de la sphère $(\mathcal{S})$ de diamètre $[AB]$.
2. Soient $(\mathcal{P}_A)$ le plan tangent à la sphère $(\mathcal{S})$ en A. Déterminer une équation de ce plan.

Solution :

1. Soit $M(x\,;y\,;z)$ un point de la sphère. $\overrightarrow{AM}(x-2; y-4\,; z-1)$ et $\overrightarrow{BM}(x; y+2\,; z-3)$
   On écrit alors le produit scalaire : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = x(x-2) + (y-4)(y+2) + (z-1)(z-3)$
   En développant : $(\mathcal{S}): x^2 - 2x + y^2 - 2y + z^2 - 4z - 5 = 0$
2. Le vecteur $\overrightarrow{AB}(-2;-6\,;2)$ est normal au plan tangent. $(\mathcal{P}_A) : x + 3y - z + d = 0$ soit en remplaçant par les coordonnées de A : $(\mathcal{P}_A) : x + 3y - z - 13 = 0$

6) Intersection dans l'espace

a) Une droite et un plan

Théorème :
Le plan $(\mathcal{P}): ax + by + cz + d = 0$ et la droite $(\mathcal{D})$ passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha ; \beta ; \gamma)$ sont sécants, si et seulement si le vecteur normal du plan $(\mathcal{P})$ n'est pas orthogonal au vecteur directeur de $(\mathcal{D})$.

Exemple 1 :

Le plan (P) a pour équation : $(\mathcal{P}): 5x + y - z + 3 = 0$ et la droite $(\mathcal{D})$ pour représentation paramétrique : $(\mathcal{D}): \begin{cases} x = t \\ y = -6t + 1 \\ z = -t + 3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ Étudier la position relative de $(\mathcal{D})$ et de $(\mathcal{P})$.

Solution :

On exhibe $\vec{u}(1; -6 ; -1)$ et $\vec{n}(5; 1 ; -1)$. On évalue $\vec{u}.\vec{n} = 5 - 6 + 1 = 0$ La droite et le plan ne sont donc pas sécants en un point. La droite est soit parallèle strictement au plan, soit inclue. On montrerait simplement en résolvant un système qu'elle est parallèle au plan.

Exemple 2 :

Déterminer l'intersection de $(\mathcal{D}): \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t - 3 \\ z = -t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et de $(\mathcal{P}): x + 2y + 4z + 4 = 0$

Solution :

On exhibe $\vec{u}(1; 2 ; -1)$ et $\vec{n}(1; 2 ; 4)$. On évalue $\vec{u}.\vec{n} = 1 + 4 - 4 = 1$. La droite et le plan ont donc un unique point en commun. On doit donc résoudre un système.

$(S): \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t - 3 \\ z = -t + 2 \\ x + 2y + 4z + 4 = 0 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. On injecte les trois premières équations dans la dernière.

On résout alors : $t + 1 + 2(2t - 3) + 4(-t + 2) + 4 = 0$ soit $t = -7$; En remplaçant la valeur de t, on obtient les coordonnées du point d'intersection $I(-6 ; -17 ; 9)$

b) Deux plans

Théorème :

Le plan $(\mathcal{P}_1): ax + by + cz + d = 0$ et le plan $(\mathcal{P}_2): a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont sécants, si et seulement si leur vecteur normal ne sont pas colinéaires. Dans ce cas, l'intersection est une droite $(\mathcal{D})$

Exemple :

On donne $(\mathcal{P}_1): 2x + 3y + 5z + 1 = 0$ et $(\mathcal{P}_2): -x + y + 4z + 3 = 0$ deux plans de l'espace. Déterminer leur intersection.

Solution :

On exhibe les vecteurs normaux $\overrightarrow{n_1}(2; 3 ; 5)$ et $\overrightarrow{n_2}(-1; 1 ; 4)$ qui ne sont pas colinéaires.

$(S): \begin{cases} 2x + 3y + 5z + 1 = 0 \\ -x + y + 4z + 3 = 0 \end{cases}$. On choisit de prendre un paramètre en posant $z = t, t \in \mathbb{R}$

$(S): \begin{cases} 2x + 3y = -1 - 5t \\ -x + y = -3 - 4t \\ z = t \end{cases}$ soit alors $(S): \begin{cases} 2x + 3(x - 3 - 4t) = -1 - 5t \\ y = x - 3 - 4t \\ z = t \end{cases}$. On obtient donc :

$(S): \begin{cases} 5x = 8 + 7t \\ y = x - 3 - 4t \\ z = t \end{cases}$ soit $(S): \begin{cases} x = \frac{8}{5} + \frac{7}{5}t \\ y = \frac{8}{5} + \frac{7}{5}t - 3 - 4t \\ z = t \end{cases}$ soit $(S): \begin{cases} x = \frac{8}{5} + \frac{7}{5}t \\ y = \frac{-7}{5} + \frac{-13}{5}t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$