Notion de suite numérique

Capacités attendues en fin de chapitre :

- Dans le cadre de l'étude d'une suite, utiliser le registre de la langue naturelle.
- Modéliser une situation permettant de générer une suite de nombres.
- Déterminer une relation explicite ou une relation de récurrence.
- Calculer les termes d'une suite définie par une formule explicite, une relation de récurrence ou par un algorithme.
- Déterminer le sens de variation d'une suite.

Le mathématicien du chapitre :

Léonardo Fibonacci (1175-1250) est un mathématicien italien vivant à Pise. Il est connu pour avoir découvert la suite qui porte son nom et le nombre d'or qui en découle. Il étudie également les travaux d'Al-Khwarizmi après ses voyages en Égypte et Sicile. Il prouve aussi que toute fraction peut s'écrire comme somme de fraction dont le numérateur est 1 soit comme fraction égyptienne.

I. *Introduction*

A en croire le Petit Larousse, une suite serait une famille de réels indexée par l'ensemble des entiers naturels.
En d'autres termes plus compréhensibles, une suite serait un ensemble infini où chaque élément se verrait attribuer un numéro (ou un entier naturel). Ce serait quelque chose de la forme :

	Élément 0	Élément 1	Élément 2	....	Élément 710	Élément 711	Élément 712	....
Famille	15	70	-1	....	π	10^3	$\sqrt{5}$	....

- Les jours de la semaine forment une suite (certes, périodique, mais une suite quand même). Quel est le 25ème terme de la suite ?
- Votre âge est aussi une suite. A chaque terme, on ajoute 1 pour obtenir l'âge suivant.
- Sauf évidemment pour les personnes nées le 29 février qui n'ont, techniquement, jamais eu 3 ans ou 17 ans. Mais 0,4, 8,12 etc. ans.
- Sachant que la première coupe du monde de rugby a eu lieu en 1987 en Nouvelle-Zélande et qu'elle a lieu tous les 4 ans, en quelle année aura lieu la 12ème coupe du monde de rugby ?

II. *Définitions et notations*

De façon plus simple, on peut dire qu'une suite est une fonction qui est définie sur ℕ et non sur ℝ ou sur un intervalle.

Définition :

Une suite numérique (u_n) est une application définie sur l'ensemble ℕ et qui à tout entier naturel n associe un et un seul réel noté u_n .
Autrement écrit : (u_n): $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$n \mapsto u_n$$

Remarques :

- (u_n) désigne la suite. On peut aussi la noter $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$On aurait pu l'appeler u comme une fonction peut s'appeler f. Mais l'usage veut que ce soit (u_n).

- u_n désigne l'image de *n* par la suite/application u. Là encore, la notation aurait très bien pu être $u(n)$ ce qui est le cas sur la calculatrice par exemple.
- On dit aussi que u_n est le ***terme de rang*** *n* de la suite.

Exemple :

On peut écrire par exemple, comme sur la TI-83 :

- $u_0 = u(0) = 12$ pour exprimer que le premier terme de la suite vaut 12.
- $u_{29} = u(29) = \frac{5}{7}$ pour exprimer que le terme de rang 29 de la suite vaut $\frac{5}{7}$. Attention, rien ne dit que ce terme est le 29ème car la suite ne commence pas forcément au rang 1 ou 0.

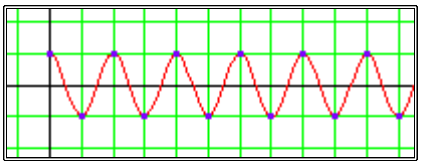
III. Modes de génération d'une suite

a) Par une formule explicite

Par exemple, on peut parler de la suite (u_n) définie pour tout entier *n* par : $u_n = \frac{n}{n+1}$
Pour calculer u_{22}, il suffit juste de remplacer *n* par 22. C'est comme pour les fonctions.
Cette suite est en fait une restriction de la fonction $f(x) = \frac{x}{x+1}$ aux entiers naturels
En effet, pour tout entier *n*, $u_n = f(n)$.

Exemple :

On donne la suite définie pour tout entier naturel par $u_n = (-1)^n$
Déterminer la fonction d'où pourrait provenir cette suite.



En observant sur le graphique ci-contre, on peut se rencontre que les points d'ordonnées 1 ou -1 ont un lien avec une fonction qui sera étudiée en Terminale :

$$\forall x > 0, f(x) = cos(\pi x)$$

b) Par une relation de récurrence

Dire qu'une suite est définie par une relation de récurrence, cela signifie qu'un terme est défini en fonction de terme(s) précédent(s). Pas nécessairement celui qui le précède.

Par exemple, on peut considérer la suite (u_n) définie pour tout *n* par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 3u_n + 7 \end{cases}$

Pour calculer u_{22}, il faut auparavant calculer $u_1, u_2, \dots, u_{21} et\ u_{22}$. C'est-à-dire tous les termes qui le précèdent... Un vrai travail de calculatrice (Voir la fiche sur l'ENT)
C'est pour cela que le plus souvent, on essaie de trouver une formule explicite. Sauf que parfois (souvent même) il n'y en a pas...

Remarque :

Avec la dernière mise à jour de la TI-83, il est même possible de rentrer une suite récurrente d'ordre 2 comme la suite de FIBONACCI.

Exercice :

Ecrire les expressions de u_{n-1}, u_{2n} et $u_n + 1$pour les deux suites suivantes :

- Une formule de récurrence : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases}$
- Une formule explicite : $u_n = 5n^2 + 3n - 2$

c) Variations d'une suite

Il est assez naturel de se demander si les termes de la suite augmentent ou diminuent en fonction du rang du terme. C'est la même notion de variation que pour les fonctions. Les suites peuvent être monotones (Croissante ou décroissante) ou avoir des variations non monotones.

Propriété :

Une suite numérique (u_n) est croissante si pour tout entier naturel *n* : $u_{n+1} \geq u_n$
Une suite numérique (u_n) est décroissante si pour tout entier naturel *n* : $u_{n+1} \leq u_n$

Remarques :

- On utilise le terme de monotone pour signaler qu'une suite est soit croissante, soit décroissante.
- Si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n$, on dit que la suite est constante.
- Il est très difficile, voire impossible en 1$^{\text{ère}}$ Spécialité d'étudier la monotonie d'une suite définie par une relation de récurrence.

Méthode :

Pour étudier les variations d'une suite, en 1$^{\text{ère}}$ Spécialité il suffit d'évaluer le signe de la différence de deux termes consécutifs. Dans la pratique, cette méthode ne peut être utilisée que si l'on possède une formule explicite.

Exemple 1 :

Soit la suite $u_n = 5n^2 + 3n - 2$ définie pour tout n. Quelle est la monotonie de cette suite ?

Correction :

On évalue donc $u_{n+1} - u_n = 5(n+1)^2 + 3(n+1) - 2 - (5n^2 + 3n - 2)$
On développe puis on simplifie : $u_{n+1} - u_n = 10n + 8$
Puisque n est un entier naturel, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, la suite (u_n) est donc croissante.

Exemple 2 :

Soit la suite $u_n = 3 + 5 \times 0{,}95^n$ définie pour tout n. Quelle est la monotonie de cette suite ?

Correction :

On évalue donc $u_{n+1} - u_n = 3 + 5 \times 0{,}95^{n+1} - (3 + 5 \times 0{,}95^n)$
On développe puis on factorise : $u_{n+1} - u_n = 5 \times 0{,}95^n \times (-0{,}05)$
Puisque n est un entier naturel, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, la suite (u_n) est donc décroissante.

d) Suite bornée

Propriété :

Une suite numérique (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n : $u_n \leq M$. M est alors appelé un majorant de (u_n)
Une suite numérique (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que pour tout entier naturel n : $u_n \geq m$. m est alors appelé un minorant de (u_n)
Une suite numérique (u_n) qui est minorée et majorée est dite bornée.

Remarques :

- Une suite croissante est minorée par son premier terme.
- Une suite décroissante est majorée par son premier terme.
- Le majorant ou le minorant ne sont pas uniques.

Exemple 1 : Le nombre d'*Erdös*.

On pose $u_1 = 0{,}2$; $u_2 = 0{,}23$; $u_3 = 0{,}235$; ... ; $u_7 = 0{,}2357111317$; ...
u_n s'écrit 0 virgule, suivi de la juxtaposition des n premiers nombres premiers:
(u_n) est croissante et majorée par 1. Sa limite l est un réel mystérieux imaginé par le mathématicien hongrois Paul Erdös en 1945.

Exemple 2 :

Soit la suite $u_n = \frac{n}{n+1}$ définie pour tout n. Montrer que cette suite est majorée.

Correction :

On peut établir par une conjecture à l'aide de la calculatrice que la suite est majorée par 1ou bien se rappeler le cours de 5$^{\text{ème}}$: Une fraction dont le numérateur est plus petit que le dénominateur est toujours plus petite que 1.

On évalue donc la différence $u_n - 1 = \frac{n}{n+1} - 1$

En mettant au même dénominateur, on obtient : $u_n - 1 = \frac{-1}{n+1}$

On obtient donc que $u_n - 1 \leq 0$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_n \leq 1$

La suite est donc majorée par 1

e) Représentation graphique

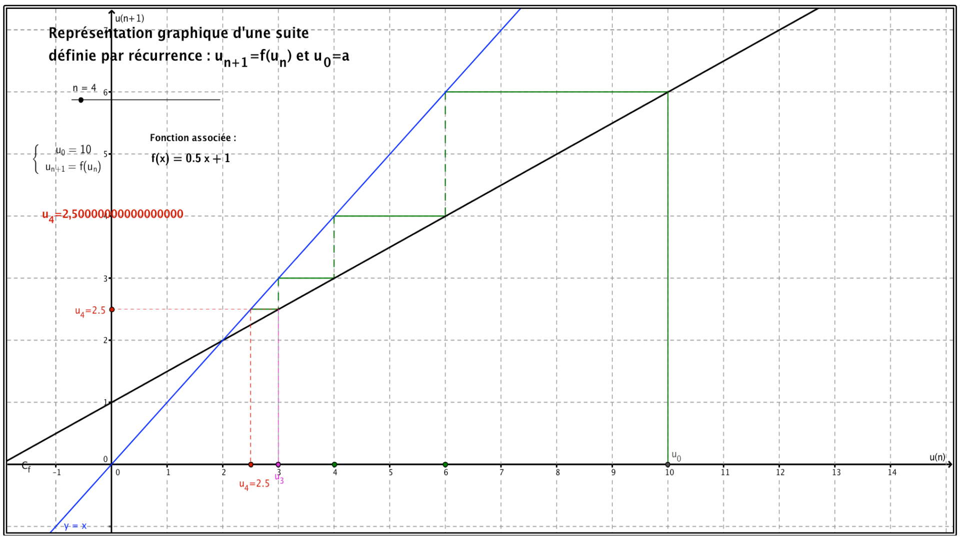
Si la suite est définie par ***une formule explicite***, la représentation s'effectue par un nuage de points. Rien ne change par rapport aux fonctions sauf que seuls les entiers ont une image.

Pour représenter les termes d'***une suite récurrente***, il faut représenter dans le même repère la représentation graphique de f ainsi que la première bissectrice d'équation $D : y = x$. Cette droite sert à reporter les valeurs exactes des termes de la suite sur l'axe horizontal afin de déterminer leur image respective par la fonction.

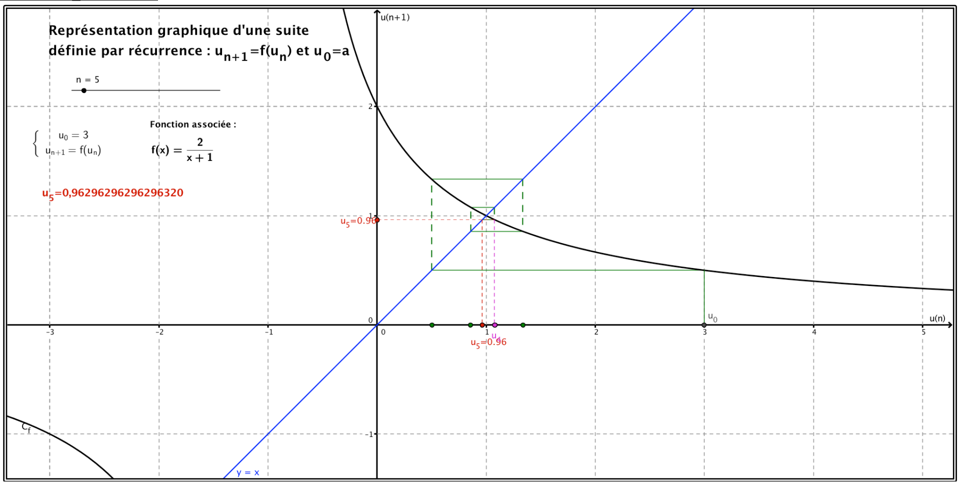
La calculatrice est capable de faire apparaître ce genre de graphique…

Il faut pour cela modifier l'affichage dans Format. (Voir fiche calculatrice sur MATH & ÇA !)

Exemple 1 :



Exemple 2 :



Remarque :

La suite ne semble pas monotone. Les termes de la suite viennent s'empiler autour d'un nombre… La limite de la suite, notion évoquée en 1ère Spécialité et étudiée en Terminale spécialité.

f) Algorithmique

Exemple 1 :

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 3n^2 + 2$ pour tout entier n. A l'aide de l'algorithme ci-dessous, construire un programme donnant le premier rang de la suite dépassant un A donné. On appelle cela la recherche d'un seuil.
Déterminer la valeur du premier terme qui dépassera le seuil souhaité.

```
VARIABLES
  A EST_DU_TYPE NOMBRE
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE A
  n PREND_LA_VALEUR 0
  u PREND_LA_VALEUR 2
  TANT_QUE (u<A) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    u PREND_LA_VALEUR 3*pow(n,2)+2
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
PROGRAM:SEUIL
:Input "A=",A
:0→N
:2→U
:While U<A
:N+1→N
:3N²+2→U
:End
:Disp "N=",N
```

```python
def seuil(A):
    n = 0
    u = 2
    while u < A:
        n = n+1
        u = 3*n**2+2
    return n
```

Remarques :

- Plusieurs variantes sont possibles. On peut par exemple afficher le terme de la suite qui dépasse le seuil ou bien afficher tous les termes de la suite en modifiant la position du Disp dans la boucle.
- Lorsqu'on dispose de la formule explicite et de la formule de récurrence, il faut toujours utiliser la formule de récurrence. Ceci permet de ne pas se soucier de la position du compteur dans la boucle et permet l'écrasement de la variable.

Exemple 2 :

On donne la suite définie pour tout entier naturel par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = -2u_n + 7 \end{cases}$

Construire un algorithme puis un programme permettant d'afficher tous les termes en fonction d'un rang donné.

```
VARIABLES
  I EST_DU_TYPE NOMBRE
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
  U EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  U PREND_LA_VALEUR 4
  LIRE N
  POUR I ALLANT_DE 1 A N
    DEBUT_POUR
    U PREND_LA_VALEUR -2*U+7
    AFFICHER "Rang de la suite="
    AFFICHER I
    AFFICHER "U="
    AFFICHER U
    PAUSE
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
ÉDIT MENU: [alpha] [f5]
PROGRAM:LISTE
:4→U
:Input "N=",N
:For(I,1,N)
: -2U+7→U
:Disp "RANG=",I
:Disp "U=",U
:Pause
:End
```

```python
def liste(n):
    u = 4
    for i in range(n):
        u = -2*u+7
        print ("u",i+1,"=",u)
```

Remarque :

Avec la calculatrice, la pause est indispensable pour avoir le temps de noter tous les termes. Essayez de l'enlever, vous verrez aisément la différence.