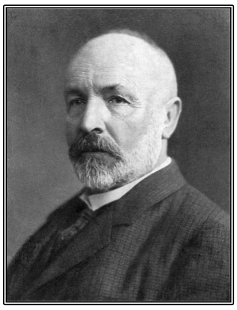
Manipuler des réels

Capacités attendues en fin de chapitre :

- Associer à chaque point de la droite graduée un unique nombre réel.
- Représenter un intervalle de la droite numérique.
- Donner un encadrement d'amplitude donnée, d'un nombre réel par des décimaux.
- Présenter les résultats fractionnaires sous forme irréductible

Le mathématicien du chapitre :



Georg Cantor (1845-1918) est un mathématicien allemand. Il est connu pour être le fondateur de la théorie des ensembles qu'il développa au début de 1880. Il introduisit des concepts nouveaux et notamment l'idée qu'il existe plusieurs types d'infini que l'on peut mesurer et comparer. De nos jours, la valeur des travaux de Cantor n'est pas discutée. Il fut quand même en contradiction permanente avec Kronecker qui déclara : « Dieu a créé les nombres entiers ; le reste est l'œuvre de l'homme »

1) *Vocabulaire sur les ensembles*

a) *Quelques généralités*

Définition

Un ensemble est une collection d'éléments ayant au moins une caractéristique commune.

Exemples :

- L'ensemble des élèves du Lycée La Merci
- L'ensemble des nombres premiers.
- L'ensemble des mois de l'année.
- L'ensemble des personnes dont les cheveux sont roux.

Remarque :

L'ensemble qui ne possède aucun élément s'appelle ***l'ensemble vide*** On le note $\emptyset$.

Définition

Étant donné un ensemble E, un ***sous-ensemble*** de E est une partie de E

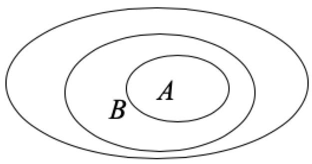
Exemple :

- Les élèves de 2nde forment un sous-ensemble de l'ensemble des élèves du lycée.
- Les mois d'été forment un sous-ensemble des mois de l'année.
- Les multiples de 4 forment un sous-ensemble des multiples de 2.
- L'ensemble des blondes vénitiennes est un sous-ensemble des blondes.

Vocabulaire :

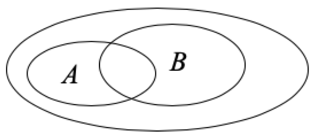
Soient A et B deux ensembles.

- On dit que A est ***inclus*** dans B lorsque tout élément de A est un élément de B.
  On écrit alors $A \subset B$. A est aussi un sous ensemble de B.



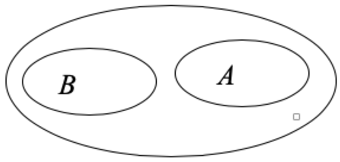
- L'***intersection*** de A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A **et** à B.

On la note $A \cap B$ qui se lit « ***A inter B*** ».



- La ***réunion*** de A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A **ou** à B.

On la note $A \cup B$ qui se lit « ***A union B*** ».



b) Exemples

On définit les ensembles suivants

E : élèves du lycée

F : élèves filles du lycée

G : élèves garçons du lycée

A : élèves du lycée ayant l'anglais pour LV

F_2 : filles de 2^{nde}

G_2 : garçons de 2^{nde}

1) On a les inclusions suivantes : $F \subset E$; $G \subset E$; $F_2 \subset F$; $G_2 \subset G$
2) $F \cap G = \emptyset$ on dit alors que F et G sont disjoints.
3) $F_2 \cap A$: Cet ensemble représente les filles de 2^{nde} qui ont pris l'anglais en LV
4) $F \cup G = E$;
5) $F_2 \cup G_2$: Cet ensemble représente tous les élèves de 2^{nde} du lycée.

c) Le complémentaire

Définition Soit E un ensemble et A un sous-ensemble de E.
Le complémentaire de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A
On le note : $\bar{A}$

Exemples :

- Le complémentaire de G est F.
- Le complémentaire de A représente tous les élèves qui n'étudient pas l'Anglais.

2) Les différents ensembles de nombres

1) Les entiers naturels

Les nombres entiers positifs sont appelés les nombres entiers naturels. Ces nombres sont dits naturels car ils sont employés naturellement dans la vie de tous les jours.
L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$.

2) Les entiers relatifs

Les nombres entiers positifs et négatifs s'appellent les nombres entiers relatifs (ex : -5, +8, 0)
L'ensemble de ces nombres est noté $\mathbb{Z}$, non pas parce que c'est un $\mathbb{N}$ couché mais parce qu'en allemand, le nombre se dit : die Zalhen.

Remarque :

Tout entier naturel est un entier relatif, on écrit alors que : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Cette inclusion n'est pas une égalité car les entiers relatifs ne sont pas des entiers naturels.

3) Les nombres décimaux

Un nombre décimal est un nombre qui s'écrit avec une virgule et dont la partie décimale ne comporte qu'un nombre fini de chiffres. Cet ensemble est noté $\mathbb{D}$. Ainsi $-12{,}38$ ou $+14{,}709$ sont des nombres décimaux.

Remarque :

Les entiers relatifs sont aussi des décimaux car $18 = 18{,}0$ on a donc : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.
Attention, la réciproque n'est pas vraie : il existe de nombreux décimaux qui ne sont pas des entiers

4) Les nombres rationnels

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire comme le quotient deux entiers relatifs (avec le dénominateur non nul). L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Remarque :

Tous les nombres décimaux sont des rationnels (fractions décimales, cours de 6ème….) De même tous les entiers peuvent s'écrire avec un 1 au dénominateur. On a donc une relation d'inclusion : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$

Bien évidemment, le contraire est faux. Comme on l'a vu ci-dessus, $\frac{5}{3}$ ou $\frac{1}{13}$ sont des rationnels mais pas des décimaux…. On peut remarquer qu'un nombre dont l'écriture décimale est infinie et périodique est un nombre rationnel.

Pour rappel, $\pi = 3{,}14159265358$n'est pas un nombre rationnel.

5) Les nombres réels

Le développement des mathématiques (en géométrie notamment) a obligé les mathématiciens à inventer d'autres nombres (comme $\sqrt{2}$ou π). Le premier est la valeur exacte de la diagonale d'un carré de côté 1 et le second est le demi-périmètre d'un disque de rayon 1.

Les mathématiciens démontrèrent avec le temps que ces deux nombres n'étaient pas des nombres rationnels. L'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$, était né.

Un réel positif est un nombre que l'on pourrait qualifier de mesurable, c'est-à-dire que l'on peut construire une ligne géométrique finie dont la longueur est ce nombre réel.

L'ensemble $\mathbb{R}$ est ainsi représenté par une droite graduée. Tout point de cette droite a pour abscisse un nombre réel. Réciproquement, tout nombre réel est l'abscisse d'un point de cette droite.

Remarque :

- Tout nombre rationnel (élément de $\mathbb{Q}$) est un nombre réel.
- On a donc : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- Un nombre dont l'écriture décimale ne comporte aucune suite de chiffres qui se répète indéfiniment après la virgule s'appelle un nombre réel.

Exemples :

$-5 \in \mathbb{Z}$ $\qquad \frac{7}{3} \in \mathbb{Q}$ $\qquad \sqrt{13} \in \mathbb{R}$ $\qquad \frac{-2}{11} \in \mathbb{Q}$ $\qquad \pi \in \mathbb{R}$

3) Différentes écritures

a) Écriture scientifique

Tout nombre décimal non nul peut s'écrire sous l'unique forme : $\begin{cases} a \times 10^p \\ -a \times 10^p \end{cases}$suivant le signe de ce nombre avec $1 \leq a < 10$ avec $p \in \mathbb{Z}$. a s'appelle alors la mantisse.

Exemples :

Écrire les nombres suivants en écriture scientifique :

- $0{,}0351 = 3{,}51 \times 10^{-2}$
- $486{,}72 = 4{,}8672 \times 10^{2}$
- $5380 \times 10^{4} = 5{,}38 \times 10^{7}$
- $6{,}34 = 6{,}34 \times 10^{0}$

b) Écriture approchée

Pour tout nombre réel x et pour tout entier naturel p, l'approximation décimale de x à 10^{-p} près est obtenue par :

- Par défaut : en prenant les p premières décimales de son écriture décimale.
- Par excès : en ajoutant 1 à la $p^{\text{ième}}$ décimale de la valeur approchée par défaut.

4) *Les intervalles réels*

a) *Les différents types d'intervalles*

- Intervalles bornés

a et b désignent deux réels tels que $a < b$

Intervalle	Représentation	Caractérisation	Appellation
$[a; b]$		$x \in [a; b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b$	Intervalle fermé borné
$]a; b[$		$x \in]a; b[\Leftrightarrow a < x < b$	Intervalle borné ouvert
$[a; b[$		$x \in [a; b[\Leftrightarrow a \leq x < b$	Intervalle borné semi-ouvert en b
$]a; b]$		$x \in]a; b] \Leftrightarrow a < x \leq b$	Intervalle borné semi-ouvert en a

Vocabulaire :

- Tout intervalle du type $[a; b]$ est dit ***fermé***.
- Tout intervalle du type $]a; b[$ est dit ***ouvert***.
- Les extrémités des intervalles s'appellent les ***bornes***.
- Le ***centre*** d'un intervalle borné est $c = \frac{a+b}{2}$.
- La ***longueur*** ou l'***amplitude*** d'un intervalle borné est $l = b - a$.

- Intervalles non bornés

Intervalle	Représentation	Caractérisation	Appellation
$[a; +\infty[$		$x \in [a; +\infty[\Leftrightarrow x \geq a$	Intervalle non borné fermé en a
$]a; +\infty[$		$x \in]a; +\infty[\Leftrightarrow x > a$	Intervalle non borné ouvert en a
$]-\infty; b]$		$x \in]-\infty; b] \Leftrightarrow x \leq b$	Intervalle non borné fermé en b
$]-\infty; b[$		$x \in]-\infty; b[\Leftrightarrow x < b$	Intervalle non borné ouvert en b
$]-\infty; +\infty[$		$x \in]-\infty; +\infty[\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$	Droite numérique

b) *Comment placer les crochets*

Le vocabulaire usuel est celui de crochet ouvert ou crochet fermé.
Un crochet est dit ouvert lorsqu'il ne regarde pas sa borne (il y a une analogie avec une fenêtre…ou la pince d'un animal). Le crochet ouvert indique que la borne n'est pas dans l'intervalle.
Au voisinage de ∞, le crochet est toujours ouvert car on ne peut pas attraper quelque chose qui s'enfuit….
Si le crochet regarde sa borne, cela signifie que la borne est le début de l'intervalle.

Notations :

$]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$, $[0; +\infty[= \mathbb{R}^+$ $\quad]0; +\infty[= \mathbb{R}_+^*$ $\quad]-\infty; 0] = \mathbb{R}^-$ et $\quad]-\infty; 0[= \mathbb{R}_-^*$

Attention :

L'ensemble des réels non nuls est noté $\mathbb{R}^*$, mais ***ce n'est pas un intervalle.***

c) Réunions et intersection d'intervalles

Définition : La réunion de deux intervalles est l'ensemble des éléments qui sont dans l'un ou dans l'autre ou éventuellement les deux.

Méthode ;

Il est souvent aisé de déterminer la réunion d'intervalles à l'aide de la représentation graphique des intervalles sur un axe gradué. On utilise deux couleurs

Exemple :

On donne $I =]-3; 2]$ et $J = [0; 4[$. La réunion est l'endroit où il y a au moins une couleur.
$]-3; 2] \cup [0; 4[=]-3; 4[$

Définition : L'intersection de deux intervalles est l'ensemble des éléments qui sont dans les deux intervalles simultanément.

Exemple :

Pour déterminer l'intersection, il faut prendre les éléments coloriés deux fois.
$]-3; 2] \cap [0; 4[= [0; 2]$

Cas particuliers :

- Une réunion d'intervalles n'est pas toujours un intervalle : $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[= \mathbb{R}^*$
- Une intersection qui contient un seul élément s'appelle un singleton : $[3; 5[\cap]1; 3] = \{3\}$
- Une intersection qui ne contient aucun élément est un ensemble vide : $[3; 5[\cap]6; 7] = \emptyset$

Exercices :

On donne trois intervalles : $I =]3; +\infty[$, $J = [1; 2]$ et $K = [2; 4[$
Simplifier alors les expressions suivantes :

- $I \cap J = \emptyset$
- $I \cap K =]3; 4[$
- $K \cap J = \{2\}$
- $I \cup J =]3;\ +\infty[\cup [1\,;2]$
- $I \cup K =]2;\ +\infty[$
- $K \cup J = [1; 4[$

5) La valeur absolue

a) Définition et propriétés

Définition :

La valeur absolue est un nombre, qui à tout nombre réel x, associe le réel noté $|x|$ tel que : $|x| = \begin{cases} x, \text{si } x \text{ est positif ou nul} \\ -x, \text{si } x \text{ est négatif} \end{cases}$

Remarques :

- La valeur absolue d'un nombre est égale à ce nombre s'il est positif et à son opposé s'il est négatif.
- $|x|$ est égal à la distance entre les réels x et 0
- La valeur absolue est le nom savant de la distance à zéro apprise en 5$^{\text{ème}}$.

Exemples :

- $|-8| = 8$
- $|+7| = 7$
- $|\pi - 4| = 4 - \pi$

Exercice :

$A = |\sqrt{2} + 1| + 4|3\sqrt{2} - 5| - \sqrt{2}|\sqrt{2} - 2|$
$A = \sqrt{2} + 1 + 4(5 - 3\sqrt{2}) - \sqrt{2}(2 - \sqrt{2})$
$A = 23 - 13\sqrt{2}$

Propriétés algébriques :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$|x| \geq 0$ $\qquad$ $|x| = |-x|$ $\qquad$ $\sqrt{x^2} = |x|$

Remarque :

Avec la *TI- 83* prémium CE, on doit suivre la procédure suivante :

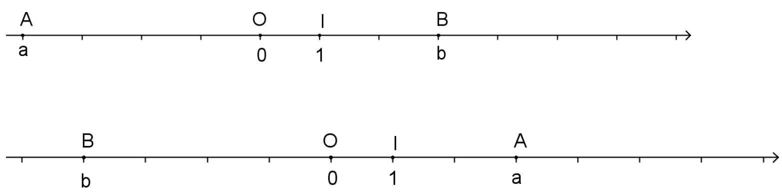
b) Distance entre deux réels

Définition :

Soient a et b deux nombres réels quelconques.
Le nombre $|b-a|$ est appelé distance entre a à b. On le note $d(b; a) = |b-a|$

Remarques :

- La définition est bien cohérente : si a et b sont deux nombres réels quelconques, $|b-a|$ est le plus grand des deux nombres $b-a$ ou $a-b$

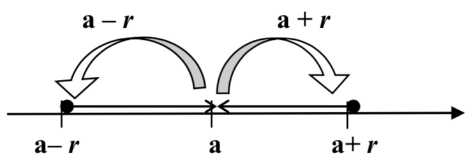


- Pour tout a réel on a : $d(a; a) = 0$. En effet $d(a; a) = |a-a| = 0$.
- $d(b; a) = d(a; b)$ car $d(a; b) = |a-b| = |-(b-a)| = |b-a| = d(b; a)$
- Si x_A et x_B sont les abscisses de deux points A et B d'un axe muni d'un repère (O ; I) tel que $OI = 1$, on a : $d(A; B) = |x_B - x_A|$

c) Résoudre des équations et des inéquations

Propriétés :

Soit $r > 0$. L'équation $|x-a| = r$ admet deux solutions : $x = a + r$ ou $x = a - r$.
Autrement dit, le nombre réel x est tel que la distance de x à a est égale à r.



Exemples :

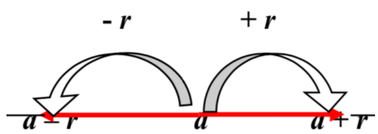
A l'aide du modèle ci-dessus, résoudre les équations suivantes :

- $|x+4| = 3$
- $S = \{-1; -7\}$
- $|x| = 1{,}5$
- $S = \{-1{,}5; 1{,}5\}$
- $|2x-3| = 5$
- $S = \{-1; 4\}$

Inéquation du type $|x-a| \leq r$

Propriétés :

Soient a et b deux réels quelconque et r un réel strictement positif.
L'ensemble des solutions de l'inéquation $|x-a| \leq r$ est l'intervalle $[a-r; a+r]$



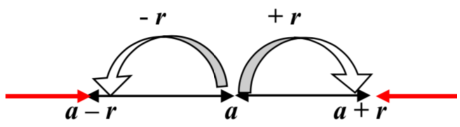
Démonstration :

$|x-a| \leq r \Leftrightarrow d(a; x) \leq r \Leftrightarrow -r \leq x-a \leq r \Leftrightarrow a-r \leq x \leq a+r$
Ce qui signifie que la distance de a à x est inférieure ou égale à r.

Inéquation du type $|x-a|>r$

Propriétés :

Soient a et b deux réels quelconque et r un réel strictement positif.
L'ensemble des solutions de l'inéquation $|x-a|>r$ est $]-\infty; a-r[\cup]a+r;+\infty[$



Exemples :

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- $|x+1|\leq 10^{-1}$
- $S=[-1{,}1;-0{,}9]$

- $|x|>2$
- $S=]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$

- $|-3x+1|>5$
- $S=\left]-\infty;-\frac{4}{3}\right[\cup]2;+\infty[$

6) Puissances d'un nombre

Activité introductive :

Des expériences en laboratoire montrent que, sans intervention extérieure, la population d'une certaine bactérie triple toutes les heures. Une chercheuse isole une population d'un millier de bactéries à 10 h du matin.
a) Combien de milliers de bactéries y-a-t-il à 11 h ? 3. A 15 h ?
b) Entre 15 h et 19 h, par combien le nombre de bactéries a-t-il été multiplié ?
c) Au bout de combien de temps la population aura-t-elle atteint 3^{14} milliers ?

Définition :

Soit a un nombre réel et n un entier naturel strictement positif.
$a^n=\underbrace{a\times a\times a\times \ldots\ldots\times a}_{n \text{ facteurs } a}$
Si $a\neq 0, a^{-n}=\frac{1}{a^n}$
Si $n=0, a^0=1$

Exemples :

- $2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$
- Le nombre décimal $\frac{1}{5}$ peut s'écrire 5^{-1}. C'est l'inverse de 5.

Propriétés algébriques :

Soient a et b deux nombres réels non nul, m et n deux entiers relatifs.
$a^n\times a^m=a^{n+m}$
$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$
$(a^n)^m=a^{mn}$
$a^n\times b^n=(ab)^n$

Remarque :

Ces propriétés permettent d'alléger la notation et sont utilisées dans la décomposition en élément simple.

Exemples :

Simplifier les écritures suivantes.

- $5^7\times 5^{12}=5^{19}$
- $2^7\times 5^7=10^7$
- $(-3)^{15}\times(-3)^{-7}=(-3)^8$
- $(4)^{11}\times(-4)^9=-(4)^{20}$