Copyright © Tous droits réservés
Ce document, ou toute partie de celui-ci, ne peut être reproduit ou utilisé de quelque manière que ce soit sans l'autorisation écrite expresse du propriétaire.

La loi des grands nombres

Capacités attendues en fin de chapitre :

- Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour définir une taille d'échantillon, en fonction de la précision et du risque choisi.

Le mathématicien du chapitre :

Irénée-Jules Bienaymé (1796 –1878) est un mathématicien français qui a travaillé notamment sur les statistiques et sur la démographie. Polytechnicien, il devient lecteur de l'académie militaire de Saint-Cyr. Traducteur français de son ami russe Tchebychev, il publie l'inégalité qui porte leurs noms et qui fournit une démonstration simple de la loi des grands nombres.

Le mathématicien du chapitre :

Pafnouti Tchebychev (1821 –1894) est un mathématicien russe. Il est connu pour ses travaux dans les domaines des probabilités, des statistiques et de la théorie des nombres. Il reprend les travaux initiés par Bernoulli, Poisson ou De Moivre en démontrant de manière rigoureuse des théorèmes limites, ceux qui permettent d'établir les tendances asymptotiques des phénomènes naturels.

1) *L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev*

a) *Inégalité de Markov*

Propriété :

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives et soit a un nombre réel strictement positif.
On a alors : $\forall a > 0, P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$

Interprétation :

Ce résultat signifie que la probabilité que X prenne des valeurs plus grandes que a est d'autant plus petite que a est grand.

Remarque :

Si $a \leq E(X)$, l'inégalité est triviale puisqu'une probabilité est toujours inférieurs ou égale à 1.

Démonstration :

X est une variable aléatoire discrète à valeurs positives. On note $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ les valeurs prises par X, ordonnées.
A l'aide de la définition de l'espérance mathématique, on a :$E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k P(X = x_k)$
a étant un nombre strictement positif, il partage $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ en deux parties :

- $\{x_1; x_2; \dots; x_j\}$ avec $x_j < a$
- $\{x_{j+1}; x_{j+2}; \dots; x_n\}$ avec $x_{j+1} \geq a$

On a alors : $E(X) = \sum_{k=1}^{j} x_k P(X = x_k) + \sum_{k=j+1}^{n} x_k P(X = x_k)$
On peut minorer l'espérance puisqu'il s'agit de somme de nombres positifs.
$E(X) \geq \sum_{k=j+1}^{n} x_k P(X = x_k)$. On a aussi que chaque $x_k \geq a$
Ainsi, $E(X) \geq \sum_{k=j+1}^{n} aP(X = x_k)$ soit finalement $E(X) \geq a \sum_{k=j+1}^{n} P(X = x_k)$
Finalement, $E(X) \geq aP(X \geq a)$ soit, $\forall a > 0, P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$ en divisant par $a > 0$

Exemple :

Soit X une variable aléatoire positive d'espérance égale à 1. On a donc $P(X \geq 100) \leq 0{,}01$.
Autrement dit, une variable aléatoire positive dont l'espérance est 1 a au plus une chance sur 100 de dépasser 100.

Copyright © Tous droits réservés
Ce document, ou toute partie de celui-ci, ne peut être reproduit ou utilisé de quelque manière que ce soit sans l'autorisation écrite expresse du propriétaire.

b) Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Propriété :

Soit X une variable aléatoire et soit t un nombre réel strictement positif.
On a alors : $\forall t > 0, P(|X - E(X)| \geq t) \leq \frac{V(X)}{t^2}$

Interprétation :

La probabilité que les valeurs prises par X s'écartent d'au moins t de l'espérance $E(X)$ est d'autant plus petite que t est grand.

Remarques :

- Les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev font partie de ce qu'on appelle les inégalités de concentration.
- On dit que $[E(X) - t; E(X) + t]$ est un intervalle de fluctuation de X.

Exemple 1 :

Si on applique l'inégalité avec $t = 2\sigma(X)$ où $\sigma(X)$ est l'écart-type de la variable X, on a :
$P(|X - E(X)| \geq 2\sigma(X)\ ) \leq \frac{V(X)}{4\sigma(X)^2}$ soit donc $P(|X - E(X)| \geq 2\sigma(X)) \leq \frac{1}{4}$
Autrement, la probabilité qu'une variable aléatoire prenne des valeurs éloignées de son espérance d'au moins le double de son écart-type est inférieure à 0,25

Exemple 2 :

Si on applique l'inégalité avec $t = 4\sigma(X)$ où $\sigma(X)$ est l'écart-type de la variable X, on a :
$P(|X - E(X)| \geq 4\sigma(X)\ ) \leq \frac{V(X)}{16\sigma(X)^2}$ soit donc $P(|X - E(X)| \geq 4\sigma(X)) \leq \frac{1}{16}$
Autrement dit, la probabilité qu'une variable aléatoire prenne des valeurs éloignées de son espérance d'au moins le quadruple de son écart-type est inférieure à 0,0625, ce qui finalement est assez improbable.

c) Exercice d'application

Énoncé :

Le nombre de pièces fabriquées dans une usine en une journée suit une variable aléatoire d'espérance 50 et de variance 25. Donner deux majorations de la probabilité que la production dépasse sur une journée 75 pièces.

Solution :

On note X la variable aléatoire égale au nombre de pièces fabriquées un jour donné. On cherche donc à majorer $P(X \geq 75)$
L'inégalité de Markov nous donne immédiatement $P(X \geq 75) \leq \frac{50}{75}$, soit $P(X \geq 75) \leq \frac{2}{3}$
Pour utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on va transformer afin de faire apparaitre la bonne expression. Pour cela, on va centrer la variable en lui retranchant son espérance.
$P(X \geq 75) = P(X - 50 \geq 25) \leq P(|X - 50| \geq 25)$
On applique alors l'inégalité.
$P(X \geq 75) \leq P(|X - 50| \geq 25) \leq \frac{25}{25^2}$ soit donc $P(X \geq 75) \leq \frac{1}{25}$
Il apparait que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est plus performante que celle de Markov en fournissant une majoration plus précise de la probabilité souhaitée.

Copyright © Tous droits réservés
Ce document, ou toute partie de celui-ci, ne peut être reproduit ou utilisé de quelque manière que ce soit sans l'autorisation écrite expresse du propriétaire.

2) La loi des grands nombres

a) Cas particulier de la loi binomiale

Rappel :

On considère un schéma de Bernoulli comportant n répétitions d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p.
Pour tout i de 1 à n, on note X_i la variable aléatoire associée à la $i-$ ème épreuve de Bernoulli qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 sinon. On a alors $P(X_i = 1) = p$
On a alors :

- Chaque variable X_i(pour tout i de 1 à n) suit une loi de Bernoulli.
- La variable aléatoire $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ est égale au nombre de succès lors des n épreuves et suit la loi binomiale de paramètres n et p

Définition :

On appelle fréquence empirique des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ la variable aléatoire M_n définie par $M_n = \frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}$ soit alors $M_n = \frac{S_n}{n}$

Propriété :

Soit t un nombre réel strictement positif.
L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à S_n et à M_n
On a alors : $\forall t > 0, P(|S_n - np| \geq t) \leq \frac{np(1-p)}{t^2}$ et $P(|M_n - p| \geq t) \leq \frac{p(1-p)}{nt^2}$

Remarques :

- La première inégalité signifie que la probabilité que la variable S_n prenne des valeurs éloignées d'une valeur t de son espérance np est d'autant plus petite que t est grand.
- On peut utiliser l'évènement contraire. On a alors : $P(|S_n - np| < t) \geq 1 - \frac{np(1-p)}{t^2}$

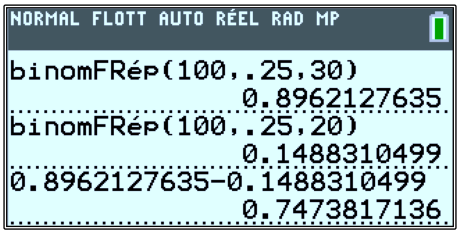
Exercice d'application :

On lance 100 fois un dé équilibré, à quatre faces de couleurs différentes et on note la couleur de la face cachée. On appelle S_n la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où la face cachée est rouge au cours des 100 lancers.
Déterminer une minoration de $P(20 \leq S_{100} \leq 30)$

Solution :

On reconnait un schéma de Bernoulli : répétition d'une expérience aléatoire (lancer un dé) de manière indépendante (l'issue d'un lancer n'a pas d'influence sur l'issue suivante)
La probabilité d'un succès vaut naturellement $p = \frac{1}{4}$.
La variable aléatoire S_{100} suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}25$.
On applique alors la loi des grands nombres dans le cas particulier de la loi binomiale.
On cherche la valeur de t tel que $P(|S_{100} - 100p| \geq t) \leq \frac{100p(1-p)}{t^2}$
On a : $|S_{100} - 100p| < t \Leftrightarrow 100p - t < S_{100} < 100p + t \Leftrightarrow 25 - t < S_{100} < 25 + t$

Puisqu'on cherche $P(20 \leq S_{100} \leq 30)$, on en déduit que $t = 5$. On a alors:
$P(|S_{100} - 100 \times 0{,}25| < 5) \geq 1 - \frac{100\times0{,}25(1-0{,}25)}{5^2}$.
$P(|S_{100} - 25| < 5) \geq 0{,}25$
Soit enfin $P(20 \leq S_{100} \leq 30) \geq 0{,}25$



On observe en calculant avec la TI-83 que cette minoration est éloignée de la vérité.

Copyright © Tous droits réservés
Ce document, ou toute partie de celui-ci, ne peut être reproduit ou utilisé de quelque manière que ce soit sans l'autorisation écrite expresse du propriétaire.

b) Cas général

Définition :

On considère n expériences aléatoires identiques indépendantes. On note $X_1, X_2, \dots, X_n$ les variables aléatoires associées à ces expériences, toutes de même loi.
On note $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ et $M_n = \frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}$ soit alors $M_n = \frac{S_n}{n}$.
M_n s'appelle la moyenne empirique des variables $X_1, X_2, \dots, X_n$

Rappel de la classe de première :

A l'aide des propriétés de l'espérance et de la variance, on a :
$E(M_n) = \frac{1}{n}E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \frac{nE(X_1)}{n} = E(X_1)$ pour l'espérance.
$V(M_n) = \frac{1}{n^2}V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \frac{nV(X_1)}{n^2} = \frac{1}{n}V(X_1)$ pour la variance.
On a alors l'inégalité de concentration suivante.

Inégalité de concentration :

On considère une expérience aléatoire et X la variable aléatoire associée à cette expérience, d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$.
On répète n fois cette expérience de manière indépendante. On obtient un échantillon de taille n composé de n variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$
Alors, : $\forall t > 0, P(|M_n - E(X)| \geq t) \leq \frac{V(X)}{nt^2}$

Exemple :

On lance n fois un dé équilibré à 8 faces et on nomme X_i la variable aléatoire donnant le résultat du $i-$ème lancer. On admet que $E(X_i) = 4{,}5$ et $V(X_i) = 5{,}25$ pour tout entier i compris entre 1 et n.
Les lancers sont indépendants, $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est un échantillon de variables aléatoires d'espérance $\mu = 4{,}5$ et de variance $\sigma^2 = 5{,}25$.
D'après l'inégalité de concentration avec $n = 100$ et $t = 0{,}5$, on a :
$P(|M_{100} - 4{,}5| \geq 0{,}5) \leq \frac{5{,}25}{100 \times 0{,}5^2}$ soit alors $P(|M_{100} - 4{,}5| \geq 0{,}5) \leq 0{,}21$.
La probabilité que l'écart entre la moyenne des 100 résultats et 4,5 soit supérieur à 0,5 est donc inférieure ou égale à 0,21.

La loi des grands nombres :

Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ un échantillon de variables aléatoires d'espérance $E(X)$ et on note $M_n = \frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}$ la moyenne empirique de cet échantillon.
Alors, $\forall t > 0, \lim\limits_{n\to\infty} P(|M_n - E(X)| \geq t) = 0$
On dit que M_n converge en probabilité vers $E(X)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exemple :

On reprend l'exemple précédent avec $t = 0{,}1$. D'après la loi des grands nombres, la probabilité $P(|M_n - 4{,}5| \geq 0{,}1)$ que l'on peut aussi écrire $P(M_n \notin]4{,}4; 4{,}6[)$ tend vers 0 lorsque la taille de l'échantillon tend vers $+\infty$.
On en déduit que $P(M_n \in [4{,}4; 4{,}6])$ tend vers 1 lorsque la taille de l'échantillon tend vers $+\infty$. Si l'on fait un nombre suffisamment grand de lancers, on peut rendre l'évènement « la moyenne de l'échantillon est située dans $[4{,}4; 4{,}6]$ aussi probable qu'on le souhaite en prenant n suffisamment grand.

Copyright © Tous droits réservés
Ce document, ou toute partie de celui-ci, ne peut être reproduit ou utilisé de quelque manière que ce soit sans l'autorisation écrite expresse du propriétaire.

c) Exercices d'application

Exercice 1 : Rechercher la taille d'un échantillon

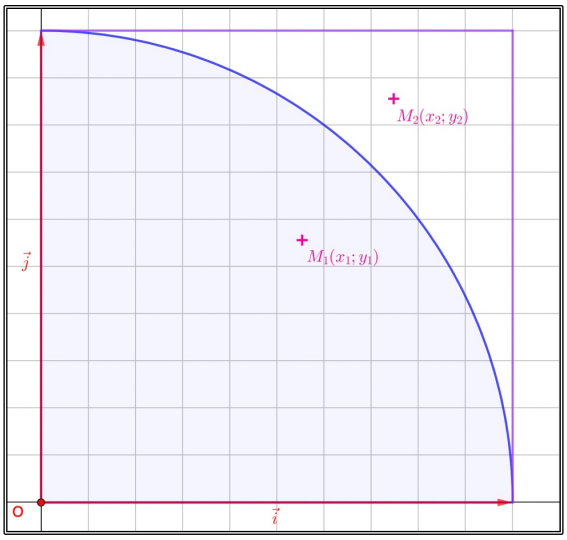
Une urne contient deux jetons sur lesquels figure le nombre 3, deux jetons sur lesquels figure le nombre 5 et un jeton sur lequel figure le nombre 10.
On tire un jeton de cette urne et on note X la variable aléatoire donnant le nombre obtenu.
Combien de tirages avec remise peut-on effectuer dans cette urne pour être sûr au risque de 5% que la moyenne des nombres obtenus soit comprise entre 5 et 5,4 exclus ?

Solution :

On détermine pour commencer l'espérance et la variance de X. On a :$\Omega = \{3; 5; 10\}$
$E(X) = \frac{2}{5} \times 3 + \frac{2}{5} \times 5 + \frac{1}{5} \times 10$ soit donc $E(X) = 5{,}2$
$V(X) = \frac{2}{5} \times (3 - 5{,}2)^2 + \frac{2}{5} \times (5 - 5{,}2)^2 + \frac{1}{5} \times (10 - 5{,}2)^2$soit donc $V(X) = 6{,}56$
Les tirages étant avec remise, ils sont indépendants. La liste des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots., X_n$ donnant les résultats des n tirages successifs est un échantillon de variables aléatoires identiques d'espérance 5,2 et de variance 6,56.
On note M_n la variable aléatoire moyenne de cet échantillon. En modélisant l'énoncé, on cherche à évaluer n afin que $P(|M_n - 5{,}2| \geq 0{,}2) \leq \frac{6{,}56}{n \times 0{,}2^2}$ soit $P(|M_n - 5{,}2| \geq 0{,}2) \leq \frac{164}{n}$
On doit donc résoudre $\frac{164}{n} \leq 0{,}05 \Leftrightarrow n \geq 3280$
Si l'on réalise au moins 3280 tirages, on est sûr à 95 % que la moyenne des résultats obtenus lors de ces tirages sera comprise entre 5 et 5,4. On dit alors que 0,2 est la précision.

Exercice 2 : Approximation de π par la méthode de Monte-Carlo

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath},)$, on considère les points d'abscisses positives, appartenant au premier quadrant. On considère l'expérience aléatoire suivante. On simule la position d'un point de coordonnées $(x; y)$, où $(x; y) \in [0; 1] \times [0; 1]$. On note X la variable aléatoire de Bernoulli qui vaut 1 si le point est dans le quart de cercle et 0 sinon. A l'aide de nos connaissances géométriques, on sait que $P(X = 1) = \frac{\pi}{4}$ en utilisant le rapport de l'aire du quart de cercle par l'aire du cercle. On a alors $E(X) = \frac{\pi}{4}$ grâce au cours sur les lois.
En répétant un grand nombre de fois ce tirage aléatoire, on obtient un échantillon de n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots., X_n$ et on note $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$. On a alors $E(M_n) = \frac{\pi}{4}$
La loi des grands nombres nous dit que $\forall t > 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} P\left(\left|M_n - \frac{\pi}{4}\right| \geq t\right) = 0$. En d'autres termes, M_n tend vers $\frac{\pi}{4}$ quand n tend vers $+\infty$.




```python
from math import sqrt
from random import random

def estimateur_Pi(n):
  compteur = 0
  for i in range(n):
    x = random()
    y = random()
    r = sqrt(x**2+y**2)
    if r <=1:
      compteur = compteur +1
  Proportion = compteur/n
  print ("approximation de Pi pour n =",n)
  return 4*Proportion
```

```
> estimateur_Pi(100)
approximation de Pi pour n = 100
3.08
> estimateur_Pi(1000)
approximation de Pi pour n = 1000
3.088
> estimateur_Pi(100000)
approximation de Pi pour n = 100000
3.14632
```