Le logarithme Népérien

Capacités attendues en fin de chapitre :

- Utiliser l'équation fonctionnelle de l'exponentielle ou du logarithme népérien pour transformer une écriture, résoudre une équation ou une inéquation
- Dans le cadre d'une résolution de problème, utiliser les propriétés des fonctions exponentielles et logarithmes.

Le mathématicien du chapitre :

John Napier (Neper en Français) est un mathématicien Ecossais (1550-1617). Les mathématiques n'étaient pas son domaine principal. Il inventa les logarithmes (en 1614) qui portent son nom afin de simplifier les calculs trigonométriques en astronomie. Il est à noter que le logarithme décimal qui est utile en chimie par exemple est une suite de ses travaux mais n'a pas été inventé par John Napier.

1) Définition de la fonction logarithme Népérien

Nous avons vu au chapitre précédent que la fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et l'intervalle image de $\mathbb{R}$ par la fonction exp est :

$exp(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} exp(x)\,;\, \lim\limits_{x\to+\infty} exp(x)\right[=]0\,;\,+\infty[$

A l'aide du corollaire du Théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), on a alors : $\forall y \in]0\,;\,+\infty[$, il existe ***un unique réel x*** tel que $y = exp(x)$.

On peut alors définir une nouvelle fonction f (dite fonction réciproque de la fonction exp), en faisant correspondre à tout réel $y > 0$, son ***unique antécédent x par la fonction*** exp

Par exemple :

$exp(0) = 1$ donc 1 a pour image 0 par f, soit $f(1) = 0$
$exp(1) = e$ donc e a pour image 1 par f, soit $f(e) = 1$
$exp(-1) = \frac{1}{e}$ donc $f\left(\frac{1}{e}\right) = -1$

Remarques :

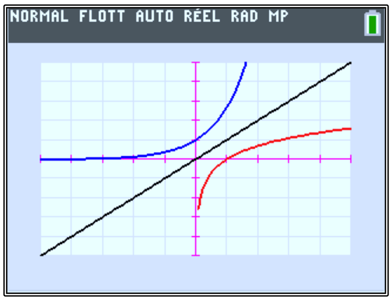
- Cette correspondance fonctionne dans les deux sens.

Si nous savons que $f(a) = b$ avec $a > 0$ et b réel, alors on peut affirmer que $b = exp(a)$

- Du point de vue des fonctions, passer de l'une de ces deux fonctions à l'autre, revient à échanger l'ensemble « de départ » et l'ensemble « d'arrivée », à inverser le rôle de l'image et de l'antécédent.
  $\begin{cases} exp: \mathbb{R} \longrightarrow]0\,;\,+\infty[\\ \quad x \mapsto y = exp\,(x) \end{cases}$ $\begin{cases} f:]0\,;\,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad y \mapsto f(y) = (x) \end{cases}$ tel que $y = exp(x)$

Il s'agit de la notion de fonction réciproque qui sera détaillée dans le supérieur.

- Du point de vue graphique, passer de la courbe représentative de l'une de ces deux fonctions à celle de l'autre, revient à échanger abscisse et ordonnée des points de la courbe. Les courbes sont donc ***symétriques par rapport à la première bissectrice***.
  La fonction exponentielle est évidemment la courbe bleue.
  La courbe ainsi définie l'est de manière unique.



Définition :

La fonction logarithme népérien notée ln, est la fonction qui, à chaque réel ***strictement positif*** x, fait correspondre l'unique solution y dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x = exp(y)$.

La fonction $\begin{matrix} ln:]0\,;\,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto ln(x) \end{matrix}$ est donc définie par : $\begin{cases} ln(x) = y \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = exp\,(y) \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$

Conséquences de la définition :

- $ex\,p(0) = 1$ Donc $0 = ln(1)$
- $ex\,p(1) = e$ Donc $1 = ln(e)$
- $exp(-1) = \frac{1}{e}$ Donc $-1 = \ln\left(\frac{1}{e}\right)$

Propriété :

$\forall x \in]0\,;\,+\infty[$, on a : $e^{ln\,(x)} = x$ $\qquad$ $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $ln(e^x) = x$

Attention :

0 ne possède pas de logarithme, pas plus que n'importe quel réel négatif !!

2) *Propriétés algébriques*

La fonction exp transforme les sommes en produits. Par réciprocité, la fonction ln transformera les produits en sommes.

Propriété fondamentale : (Relation fonctionnelle)

Pour tous réels x et y strictement positifs : $ln(xy) = ln(x) + ln(y)$

Démonstration :

Pour tous réels x et y strictement positifs $exp(ln(xy) = xy$ à l'aide de la propriété ci-dessus.
A l'aide de la propriété, on a : $exp(ln(x) + ln\,(y)) = exp(ln(x)) \times exp(ln(y)) = xy$.
Par identification, on a alors : $exp(ln(xy) = exp(ln(x) + ln\,(y))$
Puisque exp est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0\,;+\infty[$, on a : $exp(A) = exp(B) \Leftrightarrow A = B$
D'où : $\forall x > 0, \forall y > 0, ln(xy) = ln(x) + ln(y)$

Remarque :

On ne peut quasiment jamais simplifier le logarithme d'une somme.

Propriétés algébriques :

Pour tous réels x et y strictement positifs et pour tout entier relatif n:

(1) : $ln\left(\frac{1}{x}\right) = -ln(x)$ $\qquad$ (2) : $ln\left(\frac{x}{y}\right) = ln(x) - ln(y)$

(3) : $ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}ln(x)$ $\qquad$ (4) : $ln(x^n) = nln(x)$

Démonstration

Pour démontrer ces propriétés, on utilise la relation fondamentale en l'appliquant à différentes valeurs de x et y.

- Puisque $0 = ln(1)$, on peut écrire $0 = ln\left(x \times \frac{1}{x}\right) = ln(x) + ln\left(\frac{1}{x}\right)$

  Soit donc $ln\left(\frac{1}{x}\right) = -ln(x)$
- $ln\left(\frac{x}{y}\right) = ln\left(x \times \frac{1}{y}\right) = ln(x) + ln\left(\frac{1}{y}\right)$ et donc $ln\left(\frac{x}{y}\right) = ln(x) - ln(y)$
- $\ln(x) = ln(\sqrt{x} \times \sqrt{x}) = 2ln(\sqrt{x})$ d'où $ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}ln(x)$
- La dernière propriété se prouve par une récurrence simple sur n. On applique l'équation fonctionnelle à la propriété au rang $n + 1$ puis on injecte l'hypothèse de récurrence

Exemple :

Exprimer en fonction de $ln(2)$ et $ln(3)$ les nombres suivants.

- $A = ln(12)$
  $A = ln(2^2 \times 3)$
  $A = 2ln(2) + ln(3)$
- $B = ln\left(\frac{32}{81}\right)$
  $B = ln(2^5) - ln(3^4)$
  $B = 5ln(2) - 4ln(3)$

3) Dimension historique

John Neper (Napier) découvrit les logarithmes en 1614. Mais ayant craint des erreurs de calculs, il publie après son décès (en 1619) un ouvrage expliquant la méthode qu'il utilisa pour construire ses tables. Son objectif était de créer un outil pour faciliter le travail des astronomes, en transformant les produits en sommes (principe prostaphérétique)
Par exemple, une année lumière vaut $9{,}461 \times 10^{15}$mètres.
En utilisant un logarithme, on obtient $ln(9{,}461 \times 10^{15}) = ln(9{,}461) + 15ln(10)$
Ainsi $ln(9{,}461 \times 10^{15}) \approx 36{,}7859$ Ce qui permet de raccourcir grandement les longueurs.

Ce qui fit dire à Simon de Laplace (1749 –1827) : « Les logarithmes, en réduisant les calculs de quelques mois à quelques jours, doublent quasiment la vie des astronomes »

a) Table de logarithmes

De nombreuses tables sont données en logarithme décimal. C'est le cas de celle-ci-contre. Il faut connaitre la valeur approchée de $ln\,(10) \approx 2{,}30259$ pour pouvoir l'utiliser.
La formule est simple. Le logarithme décimal est défini par :
$\forall x \in]0\,;+\infty[, log(x) = \frac{ln\,(x)}{ln\,(10)}$
Ainsi, $log(2) = \frac{ln(2)}{ln(10)}$ En lisant la table, $log(2) \approx 0{,}30103$
On a donc $ln(2) = log(2) \times ln\,(10)$ soit $ln(2) \approx 0{,}69315$
Connaissant la valeur d'un logarithme, on peut retrouver le nombre auquel il fait référence.
On sait que $ln\,(x) \approx 1{,}94591$ et on souhaite retrouver x
On a alors que $log(x) = \frac{1{,}94591}{ln\,(10)}$ soit $log(x) \approx 0{,}84510$
On lit alors dans la table $log(7) \approx 0{,}8451$ donc $x \approx 7$

N	ln(N)	N	ln(N)
1	0	21	1,322 22
2	0,301 03	22	1,342 42
3	0,477 12	23	1,361 73
4	0,602 06	24	1,380 21
5	0,698 97	25	1,397 94
6	0,778 15	26	1,414 97
7	0,845 1	27	1,431 36
8	0,903 09	28	1,447 16
9	0,954 24	29	1,462 4
10	1	**30**	1,477 12
11	1,041 39	31	1,491 36
12	1,079 18	32	1,505 15
13	1,113 94	33	1,518 51
14	1,146 13	34	1,531 48
15	1,176 09	35	1,544 07
16	1,204 12	36	1,556 3
17	1,230 45	37	1,568 2
18	1,255 27	38	1,579 78
19	1,278 75	39	1,591 06
20	1,301 03	**40**	1,602 06

b) Extraire une racine carrée

La maitrise de la table des logarithmes permet notamment d'extraire une racine carrée.
Extraire une racine carrée, c'est être capable d'en donner une valeur approchée.
On peut par exemple encadrer simplement $\sqrt{2}$ en connaissant la table des carrés.
On a :$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{200}}{10}$ puisque $14^2 = 196$ et $15^2 = 225$, on peut dire que $1{,}4 \leq \sqrt{2} \leq 1{,}5$
Les logarithmes permettent de faire bien mieux. On rappelle que :$\sqrt{2} = \sqrt[2]{2}$
Alors $ln\left(\sqrt[2]{2}\right) = \frac{1}{2}ln(2)$. A l'aide de la table des logarithmes, on lit $ln(2) \approx 0{,}693$
On a $ln\left(\sqrt[2]{2}\right) \approx 0{,}3465$; On cherche alors dans la table le nombre dont le logarithme vaut $0{,}3465$. On obtient alors $ln\left(\sqrt[2]{2}\right) = ln(1{,}414)$ et donc $\sqrt{2} \approx 1{,}414$

Exemple : Donner une valeur approchée de $\sqrt[3]{0{,}665}$
On a $ln\left(\sqrt[3]{0{,}665}\right) = \frac{1}{3}ln(0{,}665)$. Avec la table des logarithmes $ln(0{,}665) \approx -0{,}40797$
Ainsi $ln\left(\sqrt[3]{0{,}665}\right) \approx \frac{1}{3} \times (-0{,}40797)$ soit $ln\left(\sqrt[3]{0{,}665}\right) \approx -0{,}13599$
Avec la table, on retrouve que $ln\left(\sqrt[3]{0{,}665}\right) \approx ln(0{,}87285)$ et donc : $\sqrt[3]{0{,}665} \approx 0{,}87285$

c) *L'algorithme de Briggs*

Henry Briggs (1561-1630) rencontre John Neper à la fin de sa vie et lui conseilla l'utilisation du logarithme décimal pour simplifier les calculs. Il publia en 1624 une table de logarithme des nombres entiers avec une précision de 14 décimales.
Voici un algorithme qui permet de calculer le logarithme népérien de tout nombre positif.

```
from math import *
def briggs(x,p):
  m = x
  n = 0
  while abs(x-1) > p:
    x = x**0.5
    n = n+1
  x= x-1
  while n > 0 :
    x=2*x
    n = n-1
  print('ln (',m,') =',x)
  print('à',p,'près')
```

La méthode de Briggs est racontée par Leonhard Euler en 1748 dans son livre « Introduction à l'analyse infinitésimale » La méthode repose sur le fait qu'au voisinage de 0, $ln(1+x) \sim x$. On prend les racines carrées successives pour se rapprocher de 0 puis on remonte vers le ln en doublant la valeur obtenue.

```
> briggs(2,0.001)
ln ( 2 ) = 0.6933818297000016
à 0.001 près
> briggs(10,0.00001)
ln ( 10 ) = 2.30259520560503
à 1e-05 près
```

4) *Étude de la fonction ln*

La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa représentation graphique $\mathcal{C}_{exp}$ admet en tout point une tangente non parallèle à l'axe des abscisses (car $exp' = exp$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
Puisque les courbes $\mathcal{C}_{ln}$ et $\mathcal{C}_{exp}$sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$, alors la courbe $\mathcal{C}_{ln}$ admettra en tout point une tangente non parallèle à l'axe des ordonnées.
On admettra donc que la fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

> ***Propriété :***
> La fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on a : $(ln(x))' = \frac{1}{x}$.
> En conséquence, la fonction ln est croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Démonstration :
On admettra donc que la fonction ln est dérivable sur$]0\,;+\infty[$.
Pour déterminer sa dérivée, on utilise la formule des fonctions composées.
$\forall x \in\,]0\,;+\infty[,\ expo\, ln(x) = exp(ln\,(x)) = x$. En dérivant membre à membre, il vient :
$(ln(x))' \times exp(ln\,(x)) = 1$ soit donc $\forall x \in\,]0\,;+\infty[$, $(ln(x))' = \frac{1}{x}$

x	0	$+\infty$
ln'		$+$
ln		$\nearrow$

Étude aux bornes :

- ***Au voisinage de $+\infty$:***

Rappelons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si, et seulement si, pour tout réel B, il existe un intervalle du type $]A\,;+\infty[$; (dépendant de B) tel que : $x \in\,]A;+\infty[\ \Longrightarrow f(x) > B$
Soit B un réel strictement positif fixé. On cherche A tel que $x > A \Longrightarrow ln(x) > B$.
Or on sait que : $ln(x) > B \Longleftrightarrow x > e^B$, car la fonction $x \mapsto \exp\,(x)$ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$. En posant alors $A = e^B$, on obtient $x > A \Longrightarrow ln(x) > B$.
Ainsi l'intervalle $]B\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $ln(x)$ pour x suffisamment grand.
On peut donc écrire : $\lim\limits_{x\to+\infty} ln(x) = +\infty$

- ***Au voisinage de 0 :***

On utilise la limite de fonctions composées. On pose $X = \frac{1}{x}$. A l'aide de ce changement de variable : $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \lim_{X\to+\infty} X = +\infty$ donc $\lim_{x\to 0} ln(x) = \lim_{x\to 0} - ln\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{X\to\infty} - lnX = -\infty$

Signe de ln ***:***

La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ et $ln(1) = 0$, d'où :
• Si $x > 1$ alors $ln(x) > 0$
• Si $0 < x < 1$ alors $ln(x) < 0$

5) *Équations et inéquations logarithmiques*

Propriété :

Pour tous réels a et b strictement positifs :

- $ln(a) = ln(b) \Leftrightarrow a = b$ car $x \mapsto ln(x)$ réalise une bijection de $]0\,;+\infty[$sur $\mathbb{R}$
- $ln(a) < ln(b) \Leftrightarrow a < b$ car $x \mapsto ln(x)$ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$

Attention :

Avant d'opérer une transformation sur une équation ou une inéquation comportant un logarithme, il faut impérativement déterminer le domaine d'existence de cet objet.

Exemple 1 :

Résoudre l'équation suivante : $(E)\colon ln(3x + 6) = 1$

Solution :

(E) existe si : $3x + 6 > 0 \Leftrightarrow x > -2$ Le domaine d'existence est : $D_E =]-2\,;+\infty[$
$ln(3x + 6) = 1$soit alors $ln(3x + 6) = ln(e)$soit donc : $3x + 6 = e \Leftrightarrow x = \frac{-6+e}{3}$
Donc $S = \left\{\frac{-6+e}{3}\right\}$ Après avoir vérifié que la solution est bien dans le domaine d'existence.

Exemple 2 :

Résoudre l'inéquation suivante : $(I)\colon ln(3x + 15) \le ln(8 - 2x)$

Solution :

(I) existe si : $\begin{cases} 3x + 15 > 0 \\ 8 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -5 \\ x < 4 \end{cases}$ Le domaine d'existence est : $D_E =]-5\,;4[$
$ln(3x + 15) \le ln(8 - 2x)$ équivaut à $3x + 15 \le 8 - 2x \Leftrightarrow x \le \frac{-7}{5}$.
On recolle alors les solutions au domaine d'existence. Donc $S = \left]-5; \frac{-7}{5}\right]$

Exemple 3 :

Résoudre l'inéquation suivante : $(I)\colon ln(2x + 1) + ln(x - 3) > ln(x + 5)$

Solution :

L'inéquation existe si : $\begin{cases} 2x + 1 > 0 \\ x - 3 > 0 \\ x + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -0{,}5 \\ x > 3 \\ x > -5 \end{cases}$ domaine d'existence : $D_E =]3\,;+\infty[$
On peut maintenant opérer sur l'inéquation. En utilisant l'équation fonctionnelle, on a :
$ln(2x + 1) + ln(x - 3) > ln(x + 5)$se transforme en $ln[(2x + 1)(x - 3)] > ln(x + 5)$
En supprimant le logarithme, $(2x + 1)(x - 3) > (x + 5)$
On développe la double distributivité et on réduit : $2x^2 - 6x - 8 > 0$
On utilise le discriminant. On trouve deux racines réelles conjuguées :$x_1 = 4$ et $x_2 = -1$
Un trinôme du second degré est du signe de a à l'extérieur des racines. En collant les solutions de l'inéquation sur le domaine d'existence, on obtient donc : $S =]4;\ +\infty[$

Exercices :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations :

- $ln(2x) > ln(x^2 - 1)$
- $e^{2x+5} = 5$
- $ln\left(\sqrt{2x-3}\right) = ln(6-x) - \frac{1}{2}ln(x)$
- $ln(2x^2 - 3x) \geq ln(6-x)$

6) Une limite remarquable

Propriété :

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{ln(1+h)}{h} = 1$ qui s'écrit aussi $\lim\limits_{x\to 1} \frac{ln(x)}{x-1} = 1$

Remarque :

On reconnaît une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$ mais également l'expression du taux d'accroissement de la fonction logarithme népérien.

Démonstration :

La fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $(ln(x))' = \frac{1}{x}$. En particulier, la fonction ln est dérivable en 1, ce qui se traduit par : $\lim\limits_{x\to 1} \frac{ln(x)-ln(1)}{x-1} = ln'(1) = 1$

Exercices :

Quelle est la limite au voisinage de $+\infty$ de la fonction $f: x \mapsto xln\left(1+\frac{1}{x}\right)$?

Solution :

On remarque une forme indéterminée $+\infty \times 0$. On transforme donc l'écriture de l'expression afin de faire apparaître la limite : $f(x) = xln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ On pose alors $h = \frac{1}{x}$

On obtient : $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{ln(1+h)}{h} = 1$

7) Croissances comparées

Propriété :

On a les limites remarquables : $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} xln(x) = 0$

Remarque :

Le logarithme est la moins forte des fonctions usuelles. La deuxième limite se calcule d'ailleurs au voisinage de 0 pour les valeurs positives.

Démonstration :

On pose $u(x) = ln(x)$ et $v(x) = \frac{x}{e^x}$ Alors, $vou(x) = \frac{ln(x)}{e^{ln(x)}} = \frac{ln(x)}{x}$ Or on connaît les limites : $\lim\limits_{x\to\infty} ln(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0$. Grâce au théorème de composition des limites, on a $\lim\limits_{x\to\infty} vou(x) = \lim\limits_{X\to\infty} v(X) = 0$ soit donc $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0$

Remarque :

Pour tout $x > 0$, on a : $ln(x) < x < e^x$. Croissances comparées des fonctions usuelles.

Propriété :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{ln(x)}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^n ln(x) = 0$

Exercice :

Déterminer la limite au voisinage de $+\infty$ de la fonction $f: x \mapsto e^{-x}(ln(x)+1)$

Solution :

Remarquons que la limite est une forme indéterminée $+\infty \times 0$. Il suffit de transformer l'écriture afin de modifier l'expression de la fonction.

$f(x) = e^{-x}(ln(x) + 1) = \frac{(ln(x)+1)}{e^x} = \frac{x}{e^x} \times \left(\frac{ln(x)}{x} + \frac{1}{x}\right)$. On a alors en calculant séparément :

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{ln(x)}{x} + \frac{1}{x}\right) = 0 \end{array}\right\} \text{par produit, on obtient : } \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

8) Composée avec la fonction ln

Soit $u: x \mapsto u(x)$ une fonction strictement positive sur un intervalle I. On peut alors définir la fonction $lnou$ sur I par : $(lnou)(x) = ln\big(u(x)\big)$ pour tout $x \in I$.

La fonction $lnou$ sera notée tout simplement lnu.

> ***Théorème 1 :***
>
> Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors la fonction lnu est dérivable sur I et : $(lnu)' = \frac{u'}{u}$

Démonstration :

Il suffit d'utiliser la formule de la dérivée d'une fonction composée.
u est une fonction dérivable sur I à valeurs positives. ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
Ainsi, la fonction composée $lnou$ est dérivable sur I et on a :
$(lnou)' = u' \times ln'(u) = u' \times \frac{1}{u} = \frac{u'}{u}$.

Exemples :

Les fonctions suivantes sont toutes définies sur $\mathbb{R}$. Calculer leur dérivée.

- $f(x) = ln(x^2 + 5x + 9)$
  f est de la forme lnu avec $u(x) = x^2 + 5x + 9$
  On a : $u'(x) = 2x + 5$
  $$f'(x) = \frac{2x + 5}{x^2 + 5x + 9}$$
- $f(x) = ln(1 + e^{-3x})$
  f est de la forme lnu avec $u(x) = 1 + e^{-3x}$
  On a : $u'(x) = -3e^{-3x}$
  $$f'(x) = \frac{-3e^{-3x}}{1 + e^{-3x}}$$

Exercice :

On donne la fonction $f(x) = ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$. Déterminer son domaine de définition puis sa dérivée.

Solution :

La fonction existe si :$\frac{1-x}{1+x} > 0 \Leftrightarrow x \in]-1; 1[$. On a donc : $D_E =]-1\,;\,1[$

f est de la forme lnu avec $u(x) = \frac{1-x}{1+x}$ Ce u est en fait un quotient qu'on dérive en utilisant l'expression de première. On obtient : $u'(x) = \frac{-2}{(1+x)^2}$

Ainsi, $f'(x) = \frac{\frac{-2}{(1+x)^2}}{\frac{1-x}{1+x}}$ qu'on simplifie alors en , $f'(x) = \frac{-2}{(1-x)(1+x)}$