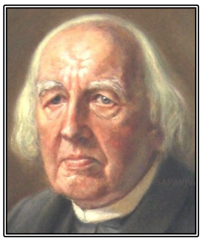
# Limites de fonctions

***Compétences attendues en fin de chapitre :***

- Calculer la limite d'une fonction en un point ou au voisinage de $\infty$.
- Utiliser les limites usuelles, les croissances comparées.
- Lever une indétermination en factorisant par le terme prépondérant.
- Utiliser des majorations et des minorations, des encadrements.
- Lien entre asymptote à une courbe et limites de fonction.

***Le mathématicien du chapitre :***



Karl Weierstrass (1815 – 1897) est un mathématicien allemand. Il mit en place un langage précis sur les limites qui permit de raisonner de manière rigoureuse. Il fut lauréat de la médaille Copley en 1895. Il est souvent cité comme le père de l'analyse moderne. Il formula une définition précise de la notion de limite qui est enseignée encore aujourd'hui.

## 1) Introduction

La notion de limite a été abordée précédemment sur le chapitre des suites. L'entier $n$, indice de la suite, ne prend que des valeurs isolées et positives. La seule étude ayant du sens est celle du comportement du terme général de la suite $(u_n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$, noté : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$

Pour les fonctions de variable réelle notée $x$, définies sur un intervalle ou une réunion d'intervalles, l'étude du comportement est différente. Plusieurs cas sont possibles pour l'étude de la limite d'une fonction $f(x)$ :

• L'étude du comportement de $f(x)$ lorsque $x$ devient très grand, noté : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

• L'étude du comportement de $f(x)$ lorsque $x$ devient très grand, négatif, noté : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

• L'étude du comportement de $f(x)$ lorsque $x$ devient voisin d'un réel $a$ en lequel $f$ est définie ou non. Dans ce cas, $a$ sera alors une borne de l'intervalle ouvert sur lequel $f$ est définie.

***Exemple :***

On donne une fonction définie sur $D_f = ]-\infty;-1[\ \cup\ ]-1;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$

Ainsi, $f$ n'est pas définie en $-1$, mais on peut s'intéresser au comportement de $f(x)$ pour des valeurs de $x$ très voisines de $-1$. Sur cet exemple, il faut calculer 4 limites différentes mais nous reviendrons plus tard sur ces subtilités…

## 2) Limite infinie de f lorsque x tend vers l'infini

### a) Exemple introductif

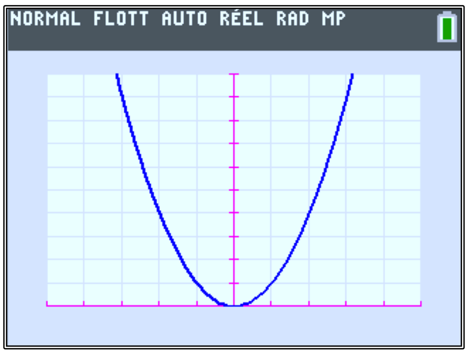
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$

$f$ est croissante sur $[0;+\infty[$. Soit $n$ un entier naturel, si $x > 10^n \Rightarrow f(x) > 10^{2n}$

Ainsi, $f(x)$ peut-être rendu aussi grand qu'on veut dès que $x$ est suffisamment grand. On dit que : $f(x)$ tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$

De même, si $x < -10^n \Rightarrow f(x) > 10^{2n}$ car la fonction carrée est décroissante sur $]-\infty;0]$

On dit que : $f(x)$ tend vers $+\infty$ au voisinage de $-\infty$

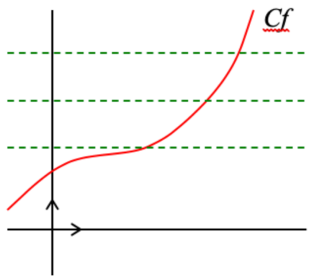


### ***b) Définitions et notations***

***Définition :***

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$ où $a$ est un réel.
Si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut dès que $x$ est assez grand, alors on dit que $f$ a pour limite $+\infty$ au voisinage de $+\infty$. On a alors la notation : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

***Approche graphique :***

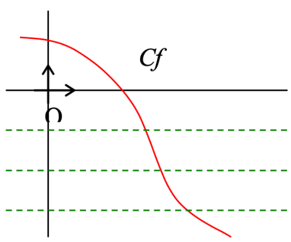



Lorsque $x$ prend des valeurs de plus en plus grandes, la courbe $C_f$ finit par se situer au-dessus de n'importe quelle droite horizontale.

***Remarques :***

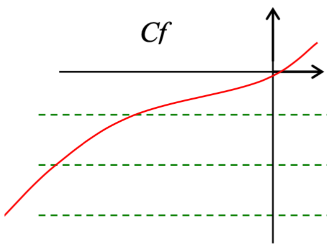
Pour tout réel $A > 0$, l'intervalle $]A;+\infty[$ contient tous les nombres $f(x)$ pour $x$ suffisamment grand

De façon formelle, $f$ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si :
Pour tout réel $A > 0$, il existe un réel $B > 0$ tel que : si $x > B \Rightarrow f(x) > A$
On dit aussi que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand $x$ tend vers $+\infty$.
On obtient sur la même idée la notion de limite au voisinage de $-\infty$



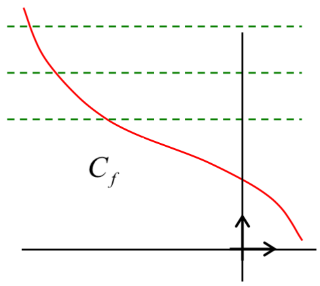

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Les nombres $f(x)$ deviennent négatifs et de plus en plus grands en valeur absolue dès que $x$ est suffisamment grand.




$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$f$ est définie sur un intervalle de la forme $]-\infty;b[$



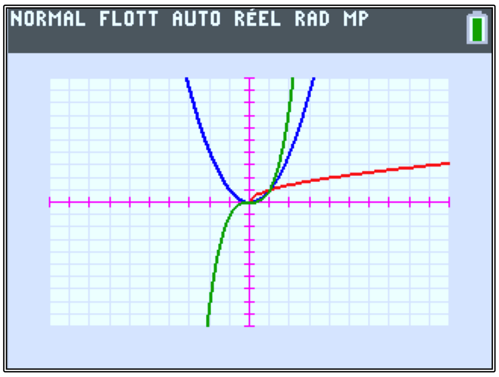

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$f$ est définie sur un intervalle de la forme $]-\infty;b[$

***Définition :***

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle de la forme$]a;\ +\infty[$ où $a$ est un réel.
Si $f(x)$ est négatif et aussi grand que l'on veut en valeur absolue dès que $x$ est assez grand, alors on dit que $f$ a pour limite $-\infty$ au voisinage de $+\infty$. On a alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

### ***c) Les fonctions de référence***




On a les limites des fonctions de référence.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

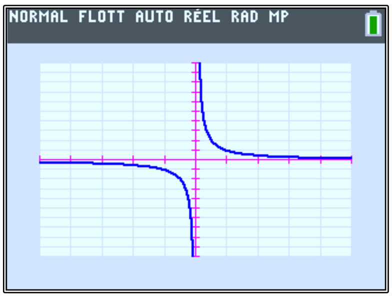
$\forall n \geq 1,\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \\ +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

### 3) *Limite finie lorsque x tend vers l'infini et asymptote horizontale*

#### a) *Approche graphique*

***Première situation :***




Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.
Considérons un entier naturel $n$ aussi grand qu'on veut. Alors, $10^{-n}$ est un réel strictement positif, aussi voisin de 0 qu'on le souhaite.
Puisque $f$ est décroissante sur $]0;+\infty[$, on a alors :
Si $x > 10^n \Rightarrow 0 < f(x) < 10^{-n}$
Ainsi $f(x)$ peut être rendu aussi voisin de 0 qu'on veut, dès que $x$ est suffisamment grand
On traduit ce comportement en disant que : $f(x)$ tend vers 0 quand $x$ tend vers $+\infty$
Ou encore que : $f$ admet pour limite 0 au voisinage de $+\infty$

***Interprétation graphique :***

La distance du point $M$ d'abscisse $x$ de la courbe à l'axe des abscisses est représenté par l'écart vertical entre la courbe et l'axe des abscisses. Cette distance vaut $f(x)$, elle tend vers 0 lorsque $x$ tend vers $+\infty$.
On dit que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe au voisinage de $+\infty$

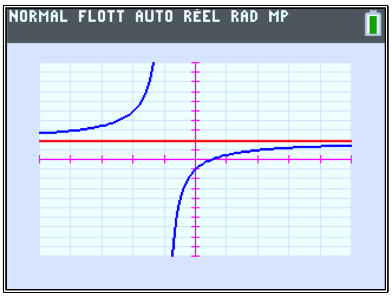
Remarquons que si $x < -10^n \Rightarrow -10^{-n} < f(x) < 0$ car la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty;0[$ . Ainsi, on a :
$f(x)$ tend vers 0 quand $x$ tend vers $-\infty$ ou que $f$ admet pour limite 0 au voisinage de $-\infty$

On dit que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe au voisinage de $-\infty$

***Remarque :***

Il arrive fréquemment que l'on indique si la limite est positive ou négative bien qu'elle soit nulle. Ceci donne une indication sur le signe de la fonction au voisinage de $\infty$. Par exemple, on a ici : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$ Ceci signifie que la courbe se rapproche de l'axe des abscisses par valeurs supérieures au voisinage de $\infty$

***Deuxième situation***




Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$$

On vérifie que $\forall x \neq -1, f(x) = 2 - \frac{3}{x+1}$
Soit $n$ un entier naturel (aussi grand qu'on veut)
Alors on a :
Si $x > 3 \times 10^n - 1 \Rightarrow 2 - 10^{-n} < f(x) < 2$

***Interprétation graphique :***

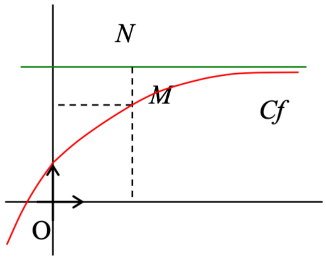
La distance du point $M$ d'abscisse $x$ de la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $N$ de même abscisse de la droite d'équation $(d): y = 2$ est $MN = \left|\frac{3}{x+1}\right|$ D'après l'étude ci-dessus, on a démontré que pour tout entier naturel $n$ :Si $x > 3 \times 10^n - 1 \Rightarrow 2 - 10^{-n} < f(x) < 2$
Pour $\forall x > 3 \times 10^n - 1$, on a donc $MN = |10^{-n}|$
Or $2 - 10^{-n} < f(x) < 2 \Leftrightarrow -10^{-n} < f(x) - 2 < 0 \Leftrightarrow 0 < 2 - f(x) < -10^{-n}$

***Conclusion :***

$\forall n \in \mathbb{N}$ (aussi grand soit-il), si $x > 3 \times 10^n - 1$, alors $MN < 10^{-n}$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} MN = 0$.

### b) *Définitions et notations*

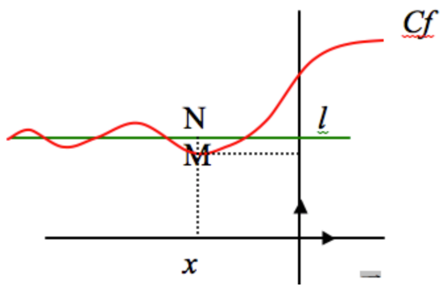
- ***Fonction de limite l au voisinage de*** $+\infty$




Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$où $a$ est un réel et $l$ un réel donné.
Intuitivement, dire que ***f a pour limite l en*** $+\infty$**,** signifie que lorsque $x$ prend des valeurs de plus en plus grandes vers $+\infty$, les nombres $f(x)$ correspondants viennent s'accumuler autour de $l$.
C'est à dire que pour tout réel $\forall\varepsilon > 0$, aussi voisin de 0 soit-il, les nombres $f(x)$ finissent par se situer dans l'intervalle $]l-\varepsilon; l+\varepsilon[$ pour $x$ assez grand.
On note alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$
On dit que la droite $(d): y = l$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $\infty$
De façon formelle, $f$ a pour limite $l$ en $+\infty$ si:

$\forall\varepsilon > 0, \exists B > 0, x > B \Longrightarrow l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon$
$\forall\varepsilon > 0, \exists B > 0, x > B \Longrightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$

- ***Fonction de limite l au voisinage de*** $-\infty$




$f$ est définie sur un intervalle de la forme $]-\infty; b[$.
Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$, on dit que la droite $(d): y = l$ est une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$

Sur le graphique ci-contre, on remarque que la distance $MN$ tend vers 0 lorsque $x$ tend vers $-\infty$

***Remarque :***

Une fonction n'a pas forcément une limite finie ou infinie quand $x$ tend vers $\infty$.

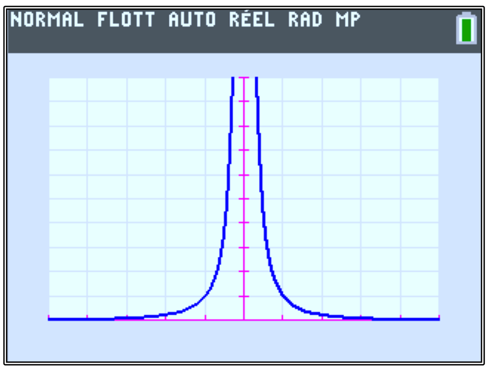
***Limites de fonctions usuelles :***

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0^+$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0^+$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0^+$ |
| $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^-$ | $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0^+$ | $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3} = 0^-$ | |

## 4) *Limite infinie en un réel a et asymptote verticale*

### a) *Approche graphique*

***Première Situation***




Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}$.
On s'intéresse au comportement de $f(x)$ lorsque $x$ est voisin de 0. On remarque que sur $]-\infty; 0[$, $f$ est croissante et que sur $]0;+\infty[$ $f$ est décroissante.
Soit un entier naturel $n$ aussi grand qu'on veut, on a :
Si :$-10^{-n} < x < 0$, alors $f(x) > 10^{2n}$
Si :$0 < x < 10^{-n}$, alors $f(x) > 10^{2n}$
Ainsi $f(x)$ peut être rendu aussi grand qu'on veut dès $x$ est suffisamment voisin de 0. On dit alors que : $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $x$ tend vers 0.
$f$ admet pour limites $+\infty$ au voisinage de 0. On note : $\lim\limits_{x\to0} f(x) = +\infty$
On dit que la droite $(d): x = 0$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de 0.

***Deuxième situation :***

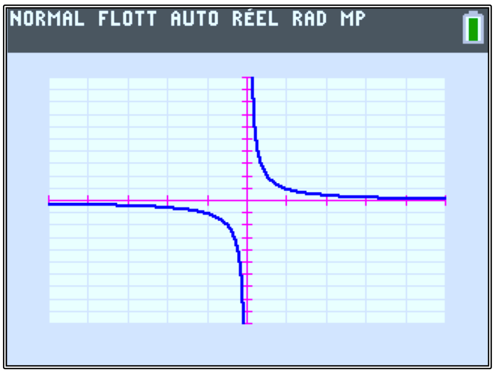
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

On s'intéresse au comportement de $f(x)$ lorsque $x$ est voisin de 0. On remarque que $f$ est décroissante sur $]-\infty; 0[$ *et* sur $]0; +\infty[$

Si $0 < x < 10^{-n}$, alors $f(x) > 10^n$

Si : $-10^{-n} < x < 0$, alors $f(x) < -10^n$

Ainsi $f(x)$ peut être rendu aussi grand qu'on veut dès $x$ est suffisamment voisin de $0^+$. On dit alors que : $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $x$ tend vers $0^+$.




De la même manière, $f(x)$ peut être rendu aussi grand qu'on veut dès $x$ est suffisamment voisin de $0^-$. On dit alors que : $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque $x$ tend vers $0^-$.

On a donc : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

On dit que la droite $(d): x = 0$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de 0.

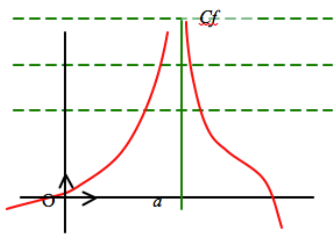
### b) Définitions et notations

***Définition :***

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle ouvert dont $a$ est une extrémité.

Si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut dès que $x$ est assez proche de $a$, alors on dit que $f$ a pour limite $+\infty$ en $a$.

On note : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$




***Interprétation graphique :***

On dit que la droite $(d): x = a$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de 0.

***Remarque :***

Il arrive souvent qu'on soit amené à définir des limites d'un seul côté de $a$. De manière plus mathématique, on dira que $f$ admet $-\infty$ pour ***limite à gauche en a*** si :

$f(x)$ est négatif et aussi grand que l'on veut en valeur absolue dès que $x$ est assez voisin de $a$, avec bien sûr $x < a$. On note, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$

Naturellement, on introduit les notions de limites à gauche de $a$ et de limite à droite de $a$.

***Résultats à retenir :***

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ | $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$ | $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$ | $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ |
| $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ | $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$ | $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$ | |

***Graphiquement :***

Les courbes représentant ces fonctions admettent l'axe des ordonnées comme asymptote verticale.

***Remarque :***

Il est assez fréquent que la limite à droite et la limite à gauche soient différentes.
C'est le cas par exemple de la fonction inverse en 0.

## 5) *Limites et opérations*

Dans les théorèmes qui suivent, $a$ désigne soit un réel, $+\infty$ ou $-\infty$; $l$ et $l'$ sont des réels.

- ***Somme***

| Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$ | $l$ | $l$ ou $+\infty$ | $l$ ou $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| et $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$ | $l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) =$ | $l+l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | FI |

***Exemple :***

Soit $f(x) = -2x^3 + 5x^2 - 7x + \sqrt{2}$ alors on a au voisinage de $-\infty$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^3+5x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -7x+\sqrt{2} = +\infty\end{array}\right\}\text{par somme, } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

- ***Produit***

| Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$ | $l$ | $l>0$ ou $+\infty$ | $l<0$ ou $-\infty$ | $l>0$ ou $+\infty$ | $l<0$ ou $-\infty$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| et $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$ | $l'$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ ou $-\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to a}(f\times g)(x) =$ | $l\times l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | FI |

- ***Inverse***

| Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$ | $l\neq 0$ | $l=0$ et $g>0$ | $l=0$ et $g<0$ | $+\infty$ ou $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| alors $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{g(x)} =$ | $\frac{1}{l}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ |

- ***Quotient***

| Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$ | $l$ | $l$ | $l>0$ ou $+\infty$ | $l>0$ ou $+\infty$ | $l<0$ ou $-\infty$ | $l<0$ ou$-\infty$ | $0$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| et $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$ | $l'\neq 0$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | 0 et $g$>0 | 0 et $g$<0 | 0 et $g$>0 | 0 et $g$<0 | $0$ | $\infty$ |
| alors $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) =$ | $\frac{l}{l'}$ | $0$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | FI | FI |

***Remarque :***

On voit donc apparaître quatre formes indéterminées : $+\infty - \infty$ , $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty \times 0$ et $\frac{0}{0}$

## 6) *Limite d'une fonction composée*

***Rappel :***

Soit $u$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et $v$ une fonction définie sur un intervalle $J$ telles que : $\forall x \in I, f(x) \in J$.
La composée de $u$ par $v$ est la fonction $vou$ définie sur $I$ par :$(vou)(x) = v\big(u(x)\big)$

***Exemple :***

On donne les fonctions $u: x \leftrightarrow x^2+1$ et $v: x \leftrightarrow \sqrt{x} - \frac{3}{x}$.

La composée de $u$ par $v$ est donnée par l'expression : $(vou)(x) = \sqrt{x^2+1} - \frac{3}{x^2+1}$

Rappelons que la composée de $v$ par $u$ ne donne pas la même expression.

***Théorème :***

Chacune des lettres *a, b et l* désigne soit un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} u(x) = b \\ \lim\limits_{X\to b} f(X) = l \end{cases}$, alors $\lim\limits_{x\to a}(vou)(x) = l$

***Exemple 1 :***

Calculer la limite en $a = 1$ de la fonction $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

On pose $u(x) = \frac{1+x}{1-x}$ et $v(X) = \sqrt{X}$. En utilisant la limite d'un quotient, on obtient la limite $\lim\limits_{x\to 1} u(x) = +\infty$. Par composition, on obtient $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{X\to +\infty} v(X) = +\infty$

***Exemple 1 :***

Calculer la limite en $a = +\infty$ de la fonction $f(x) = sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

On pose $u(x) = \frac{1}{x}$ et $v(X) = sin(X)$. En utilisant la limite d'une fonction usuelle, on obtient la limite $\lim\limits_{x\to +\infty} u(x) = 0$. Par composition, on obtient $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to 0} v(X) = 0$

## 7) Théorèmes de comparaison

Dans les théorèmes qui suivent, *a* désigne soit un réel, $+\infty$ ou $-\infty$ ; *l* et *l'* sont des réels.
*u, v et w* désignent des fonctions définies au voisinage de *a*.

***Propriétés :***

• Si $u(x) \le v(x)$ au voisinage de *a* et si $\lim\limits_{x\to a} v(x) = -\infty$ , alors $\lim\limits_{x\to a} u(x) = -\infty$

• Si $u(x) \ge v(x)$ au voisinage de *a* et si $\lim\limits_{x\to a} v(x) = +\infty$ , alors $\lim\limits_{x\to a} u(x) = +\infty$

• ***Théorème des gendarmes :***

Si $v(x) \le u(x) \le w(x)$ au voisinage de *a*, si $\lim\limits_{x\to a} v(x) = \lim\limits_{x\to a} w(x) = l \Longrightarrow \lim\limits_{x\to a} u(x) = l$

| | |
|---|---|
| • Si $u(x) \le v(x)$ au voisinage de *a*, $\lim\limits_{x\to a} u(x) = l$ *et* $\lim\limits_{x\to a} v(x) = l'$ alors $l \le l'$. | Lien entre limites et ordres |
| • Si $u(x) \ge 0$ au voisinage de *a* et si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = l$, alors $l \ge 0$ | |

***Démonstration du théorème des gendarmes :*** (dans le cas où *a* est $+\infty$)

Considérons un intervalle de centre *l* et de rayon arbitrairement petit noté $\epsilon > 0$
$\lim\limits_{x\to\infty} v(x) = l$ : Il existe un réel $B_1 > 0$ tel que : si $x > B_1$, alors. $l - \epsilon \le v(x) \le l + \epsilon$ .
$\lim\limits_{x\to\infty} w(x) = l$: Il existe un réel $B_2 > 0$ tel que : si $x > B_2$, alors $l - \epsilon \le w(x) \le l + \epsilon$.
Soit $B$ le plus grand des deux nombres $B_1$ et $B_2$.
Si $x > B$, alors on aura à la fois $x > B_1$et $x > B_2$, donc à la fois :
$l - \epsilon \le v(x) \le l + \epsilon$ et $l - \epsilon \le w(x) \le l + \epsilon$, et puisque $v(x) \le u(x) \le w(x)$, alors
$l - \epsilon \le v(x) \le u(x)$ et aussi $u(x) \le w(x) \le l + \epsilon$.
D'où : si $x > B$, alors $l - \epsilon \le u(x) \le l + \epsilon$ , donc $\lim\limits_{x\to\infty} u(x) = l$.

***Exemple :***

*f* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + sin(x)$. Calculer $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

***Correction :***

On encadre la fonctions sinus : $-1 \le sin(x) \le 1$. On a : $2x - 1 \le 2x + sin(x) \le 2x + 1$.
Puisque $\lim\limits_{x\to -\infty} 2x + 1 = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$. De la même manière, on a :
$\lim\limits_{x\to\infty} 2x - 1 = +\infty$. A l'aide du théorème de l'ascenseur $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$

## 8) Calculer une limite

Il existe 4 types de formes indéterminées, notées FI : $+\infty - \infty$ , $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty \times 0$ et $\frac{0}{0}$. On lève l'indétermination en utilisant des méthodes différentes suivant l'expression de la fonction et le voisinage.

### a) Limite d'une fonction polynôme

Soit $f(x) = -2x^3 + 5x^2 - 7x + \sqrt{2}$, définie sur $\mathbb{R}$.

• Étude au voisinage de $+\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} -2x^3 + 5x^2 = FI \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -7x + \sqrt{2} = -\infty \end{array}\right\} \text{par somme, } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = FI$$

***Méthode*** :

Elle est identique à celle utilisée pour les suites numériques : on factorise par le terme prépondérant et on applique les théorèmes relatifs aux opérations sur les limites. On évite d'utiliser l'expression terme de plus haut degré car cela n'a pas de sens si la fonction n'est pas rationnelle ou un polynôme.

Ainsi, on a : $f(x) = x^3\left(-2 + \frac{5}{x} - \frac{7}{x^2} + \frac{\sqrt{2}}{x^3}\right)$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -2 + \frac{5}{x} - \frac{7}{x^2} + \frac{\sqrt{2}}{x^3} = -2 \end{array}\right\} \text{par produit, } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

Avec la même factorisation, on obtient :

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -2 + \frac{5}{x} - \frac{7}{x^2} + \frac{\sqrt{2}}{x^3} = -2 \end{array}\right\} \text{par produit, } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

### b) Limite d'une fonction rationnelle

***Méthode*** :

Elle s'inspire de celle utilisée pour une fonction polynôme en l'infini : on factorise le polynôme numérateur par la plus grande puissance $(x^n)$ de $x$, le polynôme dénominateur par la plus grande puissance $(x^m)$ de $x$, en prenant soin de ne pas oublier de simplifier le quotient. On dit qu'on a factorisé par le terme prépondérant.

***Exemple 1 :***

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R} - \left\{-3; \frac{1}{2}\right\}$ par : $f(x) = \frac{-7x+5}{2x^2+5x-3}$.

$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{-3; \frac{1}{2}\right\}$ et $x \neq 0$, on a : $f(x) = \frac{x\left(-7+\frac{5}{x}\right)}{x^2\left(2+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}\right)} = \frac{1}{x} \times \frac{-7+\frac{5}{x}}{2+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^- \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-7+\frac{5}{x}}{2+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}} = -\frac{7}{2} \end{array}\right\} \text{par produit, } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0^+ \ (d): y = 0 \text{ est AH à } \mathcal{C}_f \text{ au voisinage de } -\infty$$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-7+\frac{5}{x}}{2+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}} = -\frac{7}{2} \end{array}\right\} \text{par produit, } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0^- \ (d): y = 0 \text{ est AH à } \mathcal{C}_f \text{ au voisinage de } +\infty$$

***Exemple 2 :***

Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{2\}$ par : $g(x)=\frac{x^3+1}{(x-2)^2}$.

$\forall x \in \mathbb{R}-\{2\}$ et $x \neq 0$, on a: $f(x)=\frac{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)^2}=x\times\frac{1+\frac{1}{x^3}}{\left(1-\frac{2}{x}\right)^2}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x^3}}{\left(1-\frac{2}{x}\right)^2}=1\end{array}\right\} \text{par produit, } \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

Avec la même factorisation, on obtient :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^3}}{\left(1-\frac{2}{x}\right)^2}=1\end{array}\right\} \text{par produit, } \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

***Attention :***

On ne peut factoriser par le terme prépondérant qu'au voisinage de l'infini.

### c) *Différents exemples de forme indéterminée* $\frac{0}{0}$

***Exemple 1 :***

Étudier la limite en 3 de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}-\{-3;3\}$ par $f(x)=\frac{2x^2-x-15}{x^2-9}$

Lorsqu'une fonction rationnelle présente une FI $\frac{0}{0}$, on peut factoriser l'expression au numérateur et au dénominateur. $\frac{2x^2-x-15}{x^2-9}=\frac{2(x-3)\left(x+\frac{5}{2}\right)}{(x-3)(x+3)}=\frac{2\left(x+\frac{5}{2}\right)}{(x+3)}$ . On peut simplifier par le facteur $(x-3)$ qui est non nul. $\lim\limits_{x\to3} f(x)=\lim\limits_{x\to3}\frac{2\left(x+\frac{5}{2}\right)}{(x+3)}=\frac{11}{6}$

On a levé l'indétermination en simplifiant les deux facteurs dans l'expression de la fonction.

***Exemple 2 :***

Calculer $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$. On observe d'abord qu'il s'agit d'une FI de la forme $\frac{0}{0}$.

***Méthode 1 :***

On utilise l'expression conjuguée afin de lever la forme indéterminée. Pour cela, on utilise l'identité remarquable $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. On transforme alors l'expression :

$$\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{x-4}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

On obtient alors $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim\limits_{x\to4}\frac{1}{\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{1}{4}$

On a l'impression que l'expression se complique mais au final, c'est bien plus simple.

***Méthode 2 :***

On utilise la notion de nombre dérivé, apprise en 1ère.

Pour rappel, si *f* est dérivable en $x_0$, alors $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$.

On pose ici $f(x)=\sqrt{x}$. Cette fonction est dérivable sur $]0;+\infty[$ avec $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

En faisant apparaitre le nombre dérivé, on obtient :

$\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim\limits_{x\to4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=f'(4)$ et donc $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$

### d) Limite d'une fonction en une extrémité réelle a d'un intervalle ouvert contenu dans l'ensemble de définition

On envisage ici le cas où la fonction n'est pas définie en $a$.

**Exemple 1 :**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R} - \left\{-3; \frac{1}{2}\right\}$ par : $f(x) = \frac{-7x+5}{2x^2+5x-3}$.
Puisque la fonction possède deux valeurs interdites, il y a 6 limites à calculer…

**Méthode :**

On calcule séparément la limite du numérateur et celle du dénominateur et on conclut en utilisant les théorèmes généraux relatifs à la limite d'un quotient.

- $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -3} -7x + 5 = 26 \\ \lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} 2x^2 + 5x - 3 = 0^- \end{array}\right\}$ par quotient $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} f(x) = -\infty$ $(d) : x = -3$ AV à $\mathcal{C}_f$
- $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -3} -7x + 5 = 26 \\ \lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} 2x^2 + 5x - 3 = 0^+ \end{array}\right\}$ par quotient $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} f(x) = +\infty$ $(d) : x = -3$ AV à $\mathcal{C}_f$
- $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} -7x + 5 = 1{,}5 \\ \lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{2}}} 2x^2 + 5x - 3 = 0^- \end{array}\right\}$ par quotient $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{2}}} f(x) = -\infty$ $(d) : x = \frac{1}{2}$ AV à $\mathcal{C}_f$
- $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} -7x + 5 = 1{,}5 \\ \lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ x > \frac{1}{2}}} 2x^2 + 5x - 3 = 0^+ \end{array}\right\}$ par quotient $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ x > \frac{1}{2}}} f(x) = +\infty$ $(d) : x = \frac{1}{2}$ AV à $\mathcal{C}_f$

**Exemple 2 :**

Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par : $g(x) = \frac{x^3+1}{(x-2)^2}$.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2} x^3 + 1 = 9 \\ \lim\limits_{x \to 2} (x-2)^2 = 0^+ \end{array}\right\}$ par quotient $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = +\infty$ $(d) : x = 2$ AV à $\mathcal{C}_f$

**Remarque :**

Il est inutile ici de distinguer les limites à droite et à gauche en 2 de la fonction $g$, puisque $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} (x-2)^2 = 0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} (x-2)^2 = 0^+$.

### e) Avec des fonctions irrationnelles

**Exemple 1 :**

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} - x$, puis $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+1} - x$

- On observe une forme indéterminée au voisinage de $+\infty$. Afin de lever l'indétermination, on modifie l'expression de la fonction à l'aide de l'expression conjuguée.

$$\sqrt{x^2+1} - x = \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}$$

On obtient : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)} = \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{1}{X} = 0^+$ $(d) : y = 0$ AH à $\mathcal{C}_f$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+1} - x = +\infty$ par somme de limites de fonctions usuelles.

***Exemple 2 :***

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1}-x$, puis $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1}-x$

Intuitivement, il n'est pas simple de déterminer le résultat, même avec du flair.

- Pour la première limite, on reconnait une forme indéterminée.

On transforme donc l'expression :

$$\sqrt{x^2+x+1}-x=\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}=\frac{x+1}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}$$

L'indétermination n'est toujours pas levée. On factorise alors le dénominateur :

$\frac{x+1}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}=\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x\right)}$. Comme on est au voisinage de $+\infty$, on peut enlever la $|\quad|$

$\frac{x+1}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}=\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x\right)}=\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}$. En utilisant les limites de fonctions composées et le quotient, on obtient : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1}-x=\frac{1}{2}$ $(d): y=\frac{1}{2}$ AH à $\mathcal{C}_f$

- Pour la seconde, on ne procède pas avec l'expression conjuguée bien qu'on reconnaisse une forme indéterminée. $\sqrt{x^2+x+1}-x=|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x$

  Au voisinage de $-\infty$, $|x|=-x$ et donc $\sqrt{x^2+x+1}-x=-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)$

  On obtient $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1}-x=+\infty$.

## *9) La fonction exponentielle*

### *a) Étude aux bornes*

- ***Au voisinage de*** $+\infty$

Soit $\phi$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x)=e^x-x$.
$\phi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
$\phi'(x)=e^x-1$ soit alors $\phi'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ et donc $\phi'(x)>0 \Leftrightarrow x>0$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\phi'$ | | - | | + | |
| $\phi$ | | ↘ | 1 | ↗ | |

On a donc : $\forall x\in\mathbb{R}, e^x>x$ et donc, à l'aide du théorème de comparaison : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

- ***Au voisinage de*** $-\infty$

On pose $X=-x$. Lorsque $x$ tend vers $-\infty$, alors $X$ tend vers $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=\lim\limits_{X\to+\infty} e^{-X}=\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{1}{e^X}=0$. On a donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$. $(d): y=0$ AH à $\mathcal{C}_f$

### *b) Les croissances comparées*

On dit souvent de la fonction exponentielle que c'est une fonction à croissance rapide. Nous allons préciser cette notion, en comparant sa " croissance" à celle de la fonction identité.

- Soit la fonction $f: x\mapsto\frac{e^x}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^*$.

La fonction $f$ présente une forme indéterminée de la forme $\frac{\infty}{\infty}$. Nous avons étudié la fonction $\phi$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x)=e^x-x$, ce qui permet de démontrer que : $\forall x\in\mathbb{R}, e^x>x$

Soit $x>0$; en appliquant cette relation au réel $t=\frac{x}{2}$, on obtient : $e^{\frac{x}{2}}>\frac{x}{2}$

Soit en divisant par $\sqrt{x}$, $\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} > \frac{\sqrt{x}}{2}$. On élève au carré les deux membres ; le sens ne change pas puisque la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0; +\infty[$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \frac{e^x}{x} > \frac{x}{4}$.

En utilisant alors le théorème de comparaison, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

- Considérons la fonction $g : x \mapsto xe^x$, définie sur $\mathbb{R}$

La fonction $g$ présente une forme indéterminée de la forme $\infty \times 0$
Puisqu'on cherche la limite au voisinage de $-\infty$, on pose alors $X = -x$.
On a alors :$xe^x = -(-x)e^{-(-x)} = -Xe^{-X}$ soit alors $xe^x = \frac{-1}{\frac{e^X}{X}}$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

> ***Théorème :***
> On a les limites des croissances comparées : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

***Exercice :***

Déterminer la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{x^2+7x-9}$

Remarquons d'abord qu'il s'agit d'une forme indéterminée. On transforme l'écriture en factorisant le dénominateur par le terme prépondérant :

$$\frac{e^{2x}}{x^2+7x-9} = \frac{e^{2x}}{x^2\left(1+\frac{7}{x}-\frac{9}{x^2}\right)} = \left(\frac{e^x}{x}\right)^2 \times \frac{1}{\left(1+\frac{7}{x}-\frac{9}{x^2}\right)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{7}{x}-\frac{9}{x^2}\right)} = 1 \end{array}\right\} \text{par produit, } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

> ***Théorème :***
> On peut généraliser avec : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

***Démonstration :***

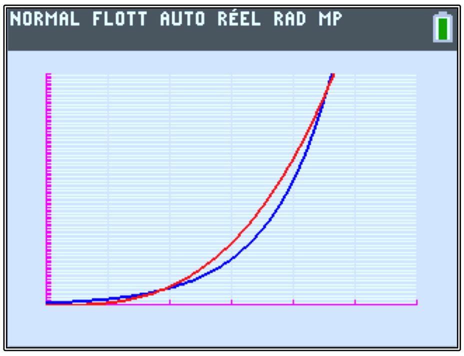
On a : $\frac{e^x}{x^n} = \frac{e^{\frac{xn}{n}}}{x^n} = \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^n = \frac{1}{n^n}\left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n$. En posant $X = \frac{x}{n}$. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{1}{n^n}\left(\frac{e^X}{X}\right)^n = +\infty$

***Remarque :***

La fonction exponentielle est plus forte que n'importe quelle fonction puissance en l'infini.

***Avec Python :***

```python
from math import *
def position(n):
    x = 0
    while exp(x) >= x**n:
        x = x + 0.1
    y = x
    while exp(y) <= y**n:
        y = y + 0.1
    print (" la courbe d'exponentielle est située sous celle de x^",n,)
    print(" entre",x,"et",y-0.1)
```




```
> position(3)
 la courbe d'exponentielle est située sous celle de x^ 3
 entre 1.9000000000000006 et 4.5
```

Ce code ne fonctionne pas pour $n = 2$ car la courbe de la fonction carrée est toujours située sous la courbe exponentielle.