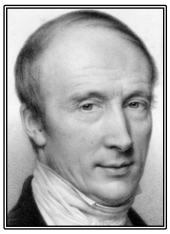
Copyright © Tous droits réservés
Ce document, ou toute partie de celui-ci, ne peut être reproduit ou utilisé de quelque manière que ce soit sans l'autorisation écrite expresse du propriétaire.

Les suites numériques

Capacités attendues en fin de chapitre :

- Établir la convergence d'une suite, ou sa divergence au voisinage de ∞.
- Étudier des phénomènes d'évolution modélisable par une suite.

Le mathématicien du chapitre :



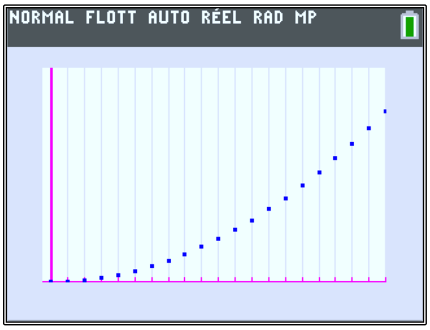
Augustin Louis baron Cauchy (1789 –1857) est un mathématicien français, l'un des plus prolifiques de l'histoire en publiant 8 ouvrages. On lui doit notamment un critère de convergence sur les suites numériques et de nombreux travaux sur les séries numériques (somme des termes d'une suite numérique). Il travailla également en optique sur la propagation des ondes.

1) Limite d'une suite

On désigne par (u_n) une suite numérique. On peut se demander ce que deviennent les nombres u_n lorsque n prend des valeurs (positives !) de plus en plus grandes
On dit alors que « n tend vers $+\infty$»

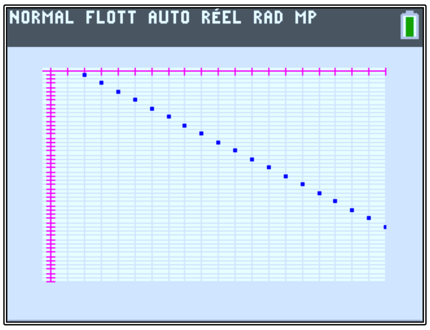
On peut déjà conjecturer ce comportement à partir des exemples ci-dessous :

a) Approche graphique



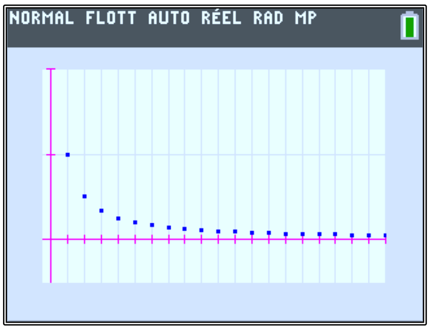
Situation 1 : $u_n = n^2$

Les nombres u_n deviennent de plus en plus grand quand n tend vers $+\infty$. On dit que la suite (u_n) tend vers $+\infty$.



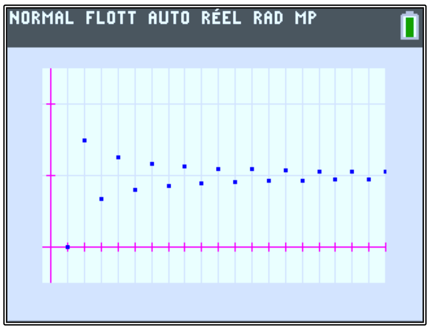
Situation 2 : $u_n = -2n + 3$

Les nombres u_n deviennent de plus en plus grand quand n tend vers $+\infty$ en valeur absolue, mais négatifs : la suite (u_n) tend vers $-\infty$



Situation 3 : $u_n = \frac{1}{n}$

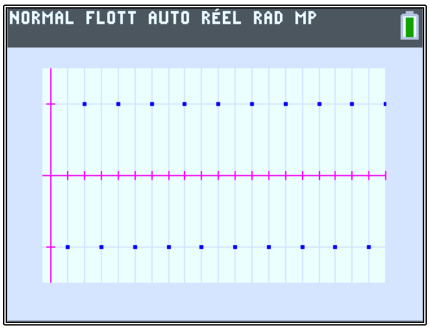
Les nombres u_n deviennent de plus en plus proches de zéro quand n tend vers $+\infty$.
On dit que la suite (u_n) tend vers 0



Situation 4 : $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$

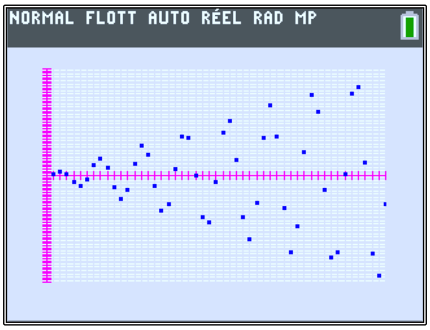
Les nombres u_n viennent s'accumuler autour de la valeur fixe **1** quand n tend vers $+\infty$. On dit que la suite (u_n) tend vers 1

Copyright © Tous droits réservés
Ce document, ou toute partie de celui-ci, ne peut être reproduit ou utilisé de quelque manière que ce soit sans l'autorisation écrite expresse du propriétaire.



***Situation 5* :** $u_n = (-1)^n$

La suite (u_n) est bornée (majorée par 1 et minorée par -1). Elle ne peut donc avoir une limite infinie. De plus, les nombres u_n ne se rapprochent d'aucun nombre réel fixe lorsque n tend vers $+\infty$.
La suite (u_n) n'a pas de limite.



***Situation 6* :** $u_n = n \times sin(n)$

La suite (u_n) n'est ni majorée, ni minorée. Elle ne peut donc avoir une limite finie. De plus, les nombres u_n prennent alternativement des valeurs négatives et positives.
La suite (u_n) ne peut donc avoir une limite infinie. La suite (u_n) n'a pas de limite.

Remarque :

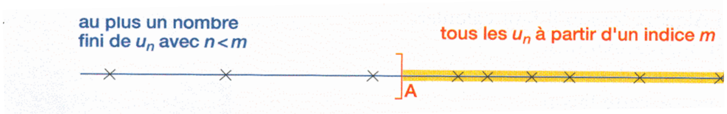
Une suite réelle (u_n) étant une fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$, définie à partir d'un certain rang, il faut bien comprendre que, du point de vue de la notion de limite, la seule étude ayant un sens, est celle du comportement de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Suites de limite infinie

Définition :

La suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si pour tout réel A, l'intervalle ouvert $]A;\ +\infty[$ contient toutes les valeurs de u_n à partir d'un certain rang. On écrit alors : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$

Interprétation graphique :



Remarques :

- Cette définition traduit l'idée que les termes u_n finissent par dépasser n'importe quel réel A aussi grand soit-il.
- Aussi grand que soit le réel $A > 0$, il existe un rang m tel que : $n > m \Longrightarrow u_n > A$.
- Il n'y a donc qu'un nombre fini de termes de (u_n) en dehors de $]A;\ +\infty[$.

Exemples :

Les suites $u_n = n^2$ ou $u_n = \sqrt{n}$ tendent vers $+\infty$. On dit alors qu'elles sont divergentes.

Exercice : *Recherche d'un seuil.*

La recherche d'un seuil consiste à déterminer à partir de quel rang le terme général d'une suite réalise une condition : dépasser une valeur, se rapprocher d'une valeur.

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 3n^2 + 2$ pour tout entier n. A l'aide de l'algorithme ci-dessous, construire un programme python donnant le premier rang de la suite dépassant A.

Copyright © Tous droits réservés
Ce document, ou toute partie de celui-ci, ne peut être reproduit ou utilisé de quelque manière que ce soit sans l'autorisation écrite expresse du propriétaire.

```
VARIABLES
  A EST_DU_TYPE NOMBRE
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE A
  n PREND_LA_VALEUR 0
  u PREND_LA_VALEUR 2
  TANT_QUE (u<A) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    u PREND_LA_VALEUR 3*pow(n,2)+2
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

```python
from math import *
def seuil(A):
    n = 0
    u = 2
    while u < A:
        n = n + 1
        u = 3*n**2 + 2
    print("u (",n,") =",u)
    print("dépasse",A)
```

```
> seuil(500)
u ( 13 ) = 509
dépasse 500
> seuil(100000)
u ( 183 ) = 100469
dépasse 100000
```

Définition :

La suite (u_n) admet pour limite $-\infty$ si la suite $(-u_n)$ admet pour limite $+\infty$, ce qui se traduit par : pour tout réel A, l'intervalle ouvert $]-\infty; A[$ contient toutes les valeurs de u_n à partir d'un certain rang. On écrit alors : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$

Remarque :

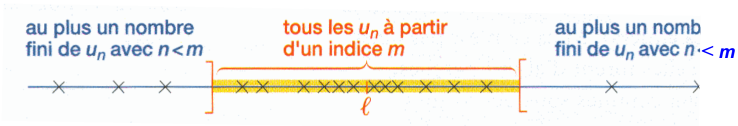
Autrement dit : « Aussi grand que soit le réel A en valeur absolue, mais négatif, il existe un rang m tel que : $n > m \Longrightarrow u_n < A$.

c) *Suites de limite finie* $(l \in \mathbb{R})$

Définition :

La suite (u_n) a pour limite l $(l \in \mathbb{R})$ si : pour tout réel $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]l-\varepsilon; l+\varepsilon[$ de centre l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On écrit : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$

Interprétation graphique :



Remarques :

- Cette définition traduit l'accumulation des termes u_n « autour de l ».
- Autrement dit : « Aussi voisin de 0 que soit le réel $\varepsilon > 0$, il existe un rang m tel que : $n > m \Longrightarrow l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon$
- Ou encore : « Aussi voisin de 0 que soit le réel $\varepsilon > 0$, il existe un rang m tel que : $n > m \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon$

Exercice :

Soit (u_n) la suite définie sur $n \geq 2$ par : $u_n = \frac{2n+5}{n-1}$

Montrons en utilisant la définition que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2$

Correction :

Soit ε un réel strictement positif (aussi voisin de 0 qu'on le souhaite).
La lettre ε est utilisée en mathématiques dès qu'on veut utiliser un nombre proche de 0

$u_n - 2 = \frac{2n+5}{n-1} - 2 = \frac{7}{n-1}$. En passant à la valeur absolue, on obtient.

$$|u_n - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{7}{n-1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon(n-1) > 7 \Leftrightarrow n > 1 + \frac{7}{\varepsilon}$$

Soit n_0 le plus petit entier naturel tel que : $n_0 > 1 + \frac{7}{\varepsilon}$

Si $n \geq n_0$, alors $|u_n - 2| < \varepsilon$ et $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2$

Copyright © Tous droits réservés
Ce document, ou toute partie de celui-ci, ne peut être reproduit ou utilisé de quelque manière que ce soit sans l'autorisation écrite expresse du propriétaire.

Propriété :

Si la suite (u_n) s'écrit $u_n = f(n)$ où *f* est une fonction de ℝ vers ℝ.
Alors : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ lorsque *f* tend vers une limite finie.

Attention : la réciproque est fausse.

Contre-exemple :

Soit la suite $u_n = cos(2\pi n)$ définie pour tout *n*.
Alors cette suite est constante et donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$
En notant, $f(x) = cos(2\pi x)$ on remarque que *f* n'admet pas de limite quand *x* tend vers $+\infty$

d) Suites convergentes et divergentes

Définition :

- On dit qu'une suite est ***convergente*** si elle possède une limite finie notée *l*.
- On dit qu'une suite est ***divergente*** si elle n'est pas convergente.

Remarque :

Dire qu'une suite (u_n) est divergente (ou diverge) revient à dire que :

- Ou bien la suite (u_n) a pour limite l'infini.
- Ou bien la suite (u_n) n'a pas de limite.

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = (-1)^n$ ce qui revient à dire $u_n = \begin{cases} 1 \text{ } si \text{ } n \text{ } est \text{ } pair \\ -1 \text{ } si \text{ } n \text{ } est \text{ } impair \end{cases}$

Cette suite n'a pas de limite car sa valeur oscille entre 1 et -1;

Théorème : (Unicité de la limite d'une suite convergente)

Si une suite (u_n) est convergente, alors sa limite est unique notée *l*.

Traduction :

Autrement dit, si on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l'$ avec l et l' réels, alors $l = l'$

Démonstration :

On suppose que la suite (u_n) converge vers deux limites, notées l et l'avec $l < l'$. On pose alors $d = l' - l$. Ce nombre d est positif par sa définition.
Puisque (u_n) converge vers *l*, il existe un rang n_1 à partir duquel tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $I_1 = \left]l - \frac{d}{3}; l + \frac{d}{3}\right[$
Puisque (u_n) converge vers *l'*, il existe un rang n_2 à partir duquel tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $I_2 = \left]l' - \frac{d}{3}; l' + \frac{d}{3}\right[$
On choisit $p = \max(n_1; n_2)$. Ainsi, à partir du rang p, tous les termes de la suite sont à la fois dans I_1 et dans I_2. Or $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. On arrive donc à une contradiction et la limite d'une suite convergente est unique.

e) Limites des suites usuelles

Théorème :

On retiendra que :

- Les suites (n); (n^2); $(\sqrt{n})$ ont pour limite $+\infty$
- Les suites $\left(\frac{1}{n}\right)$; $\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ont pour limite 0.

Copyright © Tous droits réservés
Ce document, ou toute partie de celui-ci, ne peut être reproduit ou utilisé de quelque manière que ce soit sans l'autorisation écrite expresse du propriétaire.

f) Limite d'une suite géométrique

Théorème :

La suite définie par $u_n = q^n$ est géométrique de raison q.
• Si $q < -1$, la suite est alternée et divergente.
• Si $-1 < q < 0$, la suite est alternée et convergente de limite 0.
• Si $0 < q < 1$, la suite est décroissante et convergente de limite 0.
• Si $q > 1$, la suite est croissante et divergente de limite $+\infty$.

Démonstration :

On a démontré au premier chapitre l'inégalité de Bernoulli, $\forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geq 1 + na$.
Soit $u_n = q^n$. Comme $q > 1$, on peut poser $q = 1 + a$ avec $a > 0$.
On a alors $(1+a)^n \geq 1 + na$ donc $q^n \geq 1 + na$
Or $a > 0$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + na = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$

2) Comportement à l'infini d'une suite monotone

Théorème :

Si une suite (u_n) est croissante et admet pour limite l, alors la suite est majorée par l.

Démonstration :

Nous allons raisonner par l'absurde. On suppose qu'il existe un entier p tel que $u_p > l$
(u_n) est croissante donc $n > p \Longrightarrow u_n > u_p$ (1)
De plus, $l > l - 1$ et $u_p > l$, donc $I = \left]l - 1; u_p\right[$ est un intervalle ouvert contenant l.
Comme $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$, par définition, l'intervalle I contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Ce qui contredit (1). Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < l$

Théorème :

- Si la suite (u_n) est croissante et non majorée, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.
- Si la suite (u_n) est décroissante et non minorée, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration :

Supposons que (u_n) soit croissante et non majorée et soit un intervalle $]A;\ +\infty[$

❖ Si cet intervalle ne contenait aucun terme de la suite, alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < A$ et ainsi la suite serait majorée par A. Puisque la suite n'est pas majorée, il existe un terme noté u_p qui appartient à $]A;\ +\infty[$.

❖ La suite étant croissante, $\forall n \geq p$, on a : $u_n > u_p$ et donc $u_p \in]A;\ +\infty[$.
Ainsi, à partir du rang p, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]A;\ +\infty[$. Cela étant vrai pour tout intervalle $]A;\ +\infty[$, la suite diverge vers $+\infty$

Théorème :

• Si la suite (u_n) est croissante et majorée, alors elle est convergente.
• Si la suite (u_n)est décroissante et minorée, alors elle est convergente.

Remarque :

- Ce théorème montre l'existence de la limite d'une suite mais pas la valeur de cette limite.
- La suite ne converge pas nécessairement vers le majorant ou le minorant.

Exemple : Le nombre d'*Erdös*. (Paul Erdös, 1945)

On pose $u_1 = 0{,}2$; $u_2 = 0{,}23$; $u_3 = 0{,}235$, $u_7 = 0{,}2357111317$
La partie décimale de u_n s'écrit comme la juxtaposition des n premiers nombres premiers.
(u_n)est croissante et majorée par 1 donc (u_n) est une suite convergente.

Copyright © Tous droits réservés
Ce document, ou toute partie de celui-ci, ne peut être reproduit ou utilisé de quelque manière que ce soit sans l'autorisation écrite expresse du propriétaire.

3) Opérations sur les limites

a) Limite d'une somme

Soit (w_n) une suite pouvant se décomposer sous la forme : $w_n = u_n + v_n$

Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si $\lim\limits_{n\to\infty} v_n =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n + v_n =$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Exemple :

Soit la suite (w_n) d'expression : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $w_n = 2n^2 + \frac{3}{n}$. On pose $u_n = 2n^2$et $v_n = \frac{3}{n}$

Donc : $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} 2n^2 = +\infty \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 0 \end{array}\right\}$ Par somme, on peut conclure que $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = +\infty$

b) Limite d'un produit

Soit (w_n) une suite pouvant se décomposer sous la forme : $w_n = u_n \times v_n$

Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n =$	l	$l \neq 0$	$\pm\infty$	0
Si $\lim\limits_{n\to\infty} v_n =$	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \times v_n =$	$l \times l'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	FI

Exemple :

Soit la suite (w_n) d'expression : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $w_n = \left(5 + \frac{3}{n}\right)\left(4 - \frac{3}{\sqrt{n}}\right)$

Alors, en posant : $u_n = 5 + \frac{3}{n}$ et $v_n = 4 - \frac{3}{\sqrt{n}}$

Donc : $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} 5 + \frac{3}{n} = 5 \\ \lim\limits_{n\to\infty} 4 - \frac{3}{\sqrt{n}} = 4 \end{array}\right\}$ Par produit, on peut conclure que $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 20$

c) Limite d'un quotient

Soit (w_n)une suite pouvant se décomposer sous la forme : $w_n = \frac{u_n}{v_n}$

Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n =$	l	l	$l \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
Si $\lim\limits_{n\to\infty} v_n =$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$0^{\pm}$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	0
alors $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\frac{l}{l'}$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	FI	FI

Exemple :

Reprenons la suite (w_n) d'expression : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $w_n = 2n^2 + \frac{3}{n}$

Alors, en mettant la suite au même dénominateur, on obtient $w_n = \frac{2n^3+3}{n}$ soit en posant :

Alors, en posant : $u_n = 2n^3 + 3$ et $v_n = n$

Donc : $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} 2n^3 + 3 = +\infty \\ \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty \end{array}\right\}$ Par quotient, on ne peut conclure : $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = FI$

Remarque :

Nous voyons donc avec cet exemple, traité de deux manières différentes, de la pertinence du « découpage » d'une suite afin de faire apparaître la meilleure expression possible et utilisable.

Copyright © Tous droits réservés
Ce document, ou toute partie de celui-ci, ne peut être reproduit ou utilisé de quelque manière que ce soit sans l'autorisation écrite expresse du propriétaire.

d) <u>Lever une indétermination</u>

Il existe 4 types de formes indéterminées : $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $0\times\infty$ et $\frac{0}{0}$. Il existe plusieurs méthodes afin de pouvoir lever l'indétermination et par conséquent, déterminer la limite de la suite.

- Changer l'expression de la suite en développant.
- Changer l'expression de la suite en factorisant par le terme dominant.
- Utiliser l'expression conjuguée (suite avec un radical)
- Utiliser un théorème de comparaison (théorème des gendarmes par exemples)

<u>Exemple 1 :</u>

Déterminer la limite de la suite d'expression : $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=2n^2-3n+5$
Par somme, il apparaît que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = FI$ de la forme $\infty-\infty$.
Afin de lever l'indétermination, on factorise ***<u>par le terme prépondérant</u>***.
Ainsi, $u_n=n^2\left(2-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}\right)$ On utilise alors la limite d'un produit.

Ainsi : $\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to\infty} n^2=\infty\\ \lim\limits_{n\to\infty} 2-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}=2\end{array}\right\}$ Par produit, on peut conclure que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=+\infty$

<u>Exemple 2 :</u>

Déterminer la limite d'expression $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\sqrt{n}-5n$
Par différence, il apparaît que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = FI$ de la forme $\infty-\infty$.
Il suffit de factoriser par $\sqrt{n}$ afin de lever l'indétermination , $u_n=\sqrt{n}\left(1-5\sqrt{n}\right)$
On utilise alors la limite d'un produit.

Ainsi : $\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}=\infty\\ \lim\limits_{n\to\infty} 1-5\sqrt{n}=-\infty\end{array}\right\}$ Par produit, on peut conclure que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=-\infty$

<u>Exemple 3 :</u>

Déterminer la limite de la suite d'expression : $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\frac{3n-5}{2n+1}$
Par quotient, il apparaît que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = FI$ de la forme $\frac{\infty}{\infty}$.
Afin de lever l'indétermination, on factorise ***<u>par le terme prépondérant</u>***.
Ainsi, $u_n=\frac{n\left(3-\frac{5}{n}\right)}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}$ Après avoir simplifié, On utilise alors la limite d'un quotient.

Ainsi : $\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to\infty} 3-\frac{5}{n}=3\\ \lim\limits_{n\to\infty} 2+\frac{1}{n}=2\end{array}\right\}$ Par quotient, on peut conclure que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\frac{3}{2}$

<u>Exemple 4 :</u>

Déterminer la limite de la suite d'expression : $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\sqrt{n^2+1}-n$
Par somme, il apparaît que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = FI$ de la forme $\infty-\infty$.
On transforme l'écriture à l'aide de l'expression conjuguée.
$u_n=\sqrt{n^2+1}-n=\frac{\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$. On calcule alors la limite

Ainsi : $\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to\infty} 1=1\\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+1}+n=+\infty\end{array}\right\}$ Par quotient, on peut conclure que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$

Copyright © Tous droits réservés
Ce document, ou toute partie de celui-ci, ne peut être reproduit ou utilisé de quelque manière que ce soit sans l'autorisation écrite expresse du propriétaire.

Remarques :

- On voit avec ces trois exemples qu'une même *FI* peut donner des limites différentes.
- Il est difficile de faire une généralisation des méthodes. Par exemple, même si la suite présente un radical, on n'utilisera pas toujours l'expression conjuguée. Il faut donc connaître les différentes méthodes et posséder du …flair.

4) Théorèmes de comparaison

Théorème : (dit de l'ascenseur)

Soient (u_n)et (v_n)deux suites vérifiant :
$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n > n_0, v_n < u_n$ *et* $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$ Alors, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$

Démonstration :

Soit A un réel positif. Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$, alors tout intervalle $]A;\ +\infty[$ contient les termes de la suite (v_n) à partir d'un certain rang noté n_1. Ainsi, $\forall n > n_1$, on a : $v_n \geq A$. De plus, $\forall n > n_0$ on a: $v_n < u_n$. En notant $p = max(n_1; n_1)$, $\forall n > p$ on a : $A < v_n < u_n$
Ainsi tout intervalle de la forme $]A;\ +\infty[$.contient les termes de (u_n) à partir d'un certain rang donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$

Exemple :

On donne la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 + (-1)^n$ Comme nous l'avons déjà vu, $(-1)^n$ prend les valeurs $+1$ ou -1. On peut donc écrire : $n^2 - 1 < u_n$ On a minoré la suite (u_n) par une suite qui tend vers $+\infty$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$,

Remarque :

On pourrait écrire le même théorème avec $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = -\infty$, mais l'inégalité serait inversée.

Théorème : (dit des gendarmes)

Soient l un nombre réel fini et (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites vérifiant :
$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n > n_0$, $v_n < u_n < w_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} w_n = l$, Alors, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$

Remarque :

Lorsqu'on est incapable de connaître la limite d'une suite, on l'encadre par deux suites qui tendent vers un même nombre. On utilise fréquemment cette méthode avec les fonctions. Trigonométriques.

Exemple :

On donne la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 3 + \frac{sin\,(n)}{n}$. Comme nous l'avons déjà vu, nous pouvons encadrer la fonction sinus. $c, -1 \leq \sin\,(n) \leq 1$. On a ainsi l'encadrement de la suite $\forall n \in \mathbb{N}^*, 3 + \frac{-1}{n} \leq 3 + \frac{sin\,(n)}{n} \leq 3 + \frac{1}{n}$
Par passage à la limite, on obtient. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 3$

Théorème :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant :
$\exists l \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n > n_0, |u_n - \text{l}| < v_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$, Alors, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$

Exemple :

On donne la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{2n+(-1)^n}{n}$ On conjecture que la suite (u_n) va converger vers 2. On évalue alors $|u_n - 2| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right|$ Soit en majorant $|u_n - \text{l}| < \frac{1}{n}$
Par passage à la limite, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

Copyright © Tous droits réservés
Ce document, ou toute partie de celui-ci, ne peut être reproduit ou utilisé de quelque manière que ce soit sans l'autorisation écrite expresse du propriétaire.

5) Suites récurrentes

a) Définition

Définition :
Une suite (u_n) est récurrente s'il existe une fonction *f* telle que : $u_{n+1} = f(u_n)$

Exemples :

- $u_{n+1} = 5{u_n}^2 + 7u_n - 8$ est une suite récurrente avec $f(x) = 5x^2 + 7x - 8$
- $u_{n+1} = 3u_n + n$ n'est pas une suite récurrente

b) Représentation graphique

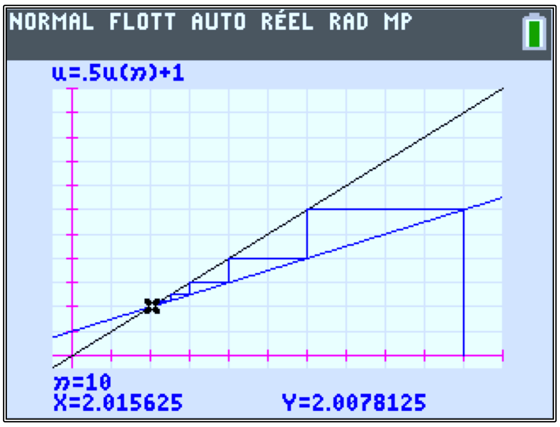
Pour représenter les termes d'une suite récurrente, il faut représenter dans le même repère la représentation graphique de *f* ainsi que la première bissectrice d'équation $(D): y = x$. Cette droite sert à reporter les valeurs exactes des termes de la suite sur l'axe horizontale afin de déterminer leur image respective par la fonction.

Exemple 1 :

Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0{,}5u_n + 1 \end{cases}$$

Par lecture graphique, la suite semble être décroissante et tendre vers la valeur 2. Ceci n'est qu'une conjecture mais donne une idée assez précise de ce qui se passe.

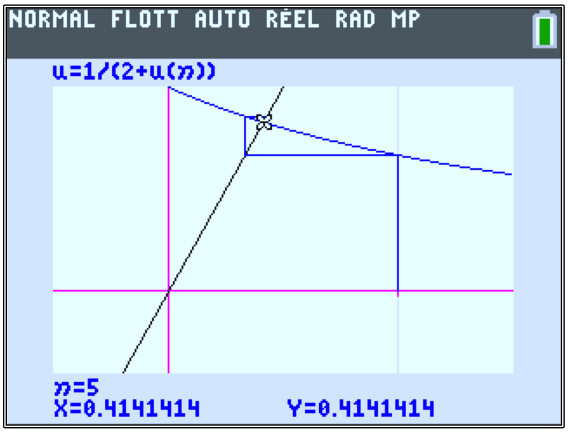


Exemple 2 :

Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{2 + u_n} \end{cases}$$

Par lecture graphique, la suite semble ne pas être monotone mais semble tendre vers la valeur 1. On dit que cela ressemble à un escargot.



c) Variations

Les variations de *f* ne permettent pas de conclure sur les variations de la suite. Cependant, quand *f* est croissante sur $\mathbb{R}$, on peut montrer la monotonie de la suite par récurrence.

Exemple :

On sait que $u_0 < u_1$ et on veut montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n: u_n < u_{n+1}$
P_0 est vraie donc la propriété est initialisée.
On suppose qu'il existe un entier *n* tel que P_n soit vraie, on veut montrer $P_{n+1}: u_{n+1} < u_{n+2}$
On sait que $u_n < u_{n+1}$. On compose par *f*, fonction croissante sur $\mathbb{R}$, ce qui permet de conserver le sens. Ainsi $f(u_n) < f(u_{n+1})$ soit alors : $u_{n+1} < u_{n+2}$. et donc P_{n+1} est vraie.
Ce qui permet de conclure que la suite (u_n) est croissante.
On pourrait procéder de la même manière si *f* était décroissante sur $\mathbb{R}$

Copyright © Tous droits réservés
Ce document, ou toute partie de celui-ci, ne peut être reproduit ou utilisé de quelque manière que ce soit sans l'autorisation écrite expresse du propriétaire.

d) Point fixe

Définition :

Une fonction *f*, continue sur ℝ, admet un point fixe s'il existe des réels vérifiant l'équation : $f(x) = x$. On dit alors que *x* est invariant par *f*.

Théorème :

Si (u_n) est une suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et que (u_n) converge vers une limite, notée *l*, alors *l* est un point fixe de *f*.

Exemple 1 :

On donne la suite arithmético-géométrique définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3} \end{cases}$.

Déterminer alors l'expression de (u_n) en fonction de *n*.
En classe de première, on aurait donné l'expression d'une suite auxiliaire qu'on aurait étudiée.
Ici, on détermine le potentiel point fixe de *f*, définie par : $f(x) = \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}$. On résout donc l'équation : $l = \frac{1}{6}l + \frac{1}{3}$ soit $l = \frac{2}{5}$. On pose alors $v_n = u_n - \frac{2}{5}$ et on montre que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{6}$. On calcule le premier terme $v_0 = \frac{1}{2} - \frac{2}{5}$ soit $v_0 = \frac{1}{10}$
On obtient ainsi l'expression d'une suite géométrique : $v_n = \frac{1}{10} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n$
Et donc, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2}{5} + \frac{1}{10} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n$. $\frac{2}{5}$ est bien la limite de la suite (u_n) .

Remarque :

Le point fixe est bien ici la limite de la suite (u_n) . Attention, ce n'est pas toujours vrai.

Exemple 2 :

On donne la suite arithmético-géométrique définie par : $\begin{cases} u_0 = 6 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 5u_n - 8 \end{cases}$

Déterminer alors l'expression de (u_n) en fonction de *n*.
On détermine le potentiel point fixe de *f*, définie par $f(x) = 5x - 8$.
On résout donc $l = 5l - 8$ soit $l = 2$. On pose alors $v_n = u_n - 2$ et on montre que la suite (v_n) est géométrique de raison 5. On calcule le premier terme $v_0 = 6 - 2$ soit $v_0 = 4$.
On obtient ainsi l'expression d'une suite géométrique : $v_n = 4 \times 5^n$
Et donc, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 + 4 \times 5^n$. 2 ne peut pas être la limite car la suite est divergente mais la recherche du point fixe a permis de déterminer l'expression de la suite.

6) Un peu d'algorithmique

Exemple 1 :

On donne une suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases}$.

On détermine sa limite potentielle en cherchant les points fixes. On résout $l = \sqrt{3l + 4}$ avec *l* un nombre positif. L'équation devient $l^2 - 3l - 4 = 0$.
Cette équation admet deux racines qui sont 4 et -1. La limite possible est donc 4.
On souhaite approcher cette suite aussi près que possible de sa limite.
Pour cela, on construit un programme avec une boucle ouverte (aussi appelée boucle conditionnelle ou boucle Tant que)
Tant que l'écart entre la limite et le terme u_n est plus grand qu'une valeur souhaitée, le programme tourne.
On donne ci-dessous un exemple d'algorithme (avec Algobox) ainsi que le programme Python correspondant.

Copyright © Tous droits réservés
Ce document, ou toute partie de celui-ci, ne peut être reproduit ou utilisé de quelque manière que ce soit sans l'autorisation écrite expresse du propriétaire.

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
  E EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE E
  n PREND_LA_VALEUR 0
  u PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (abs(u-4)>=E) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    u PREND_LA_VALEUR sqrt(3*u+4)
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER n
  AFFICHERCALCUL abs(u-4)
FIN_ALGORITHME
```

```python
from math import sqrt
def ecart(e):
    n = 0
    u = 0
    while abs(u-4)> e:
        n = n+1
        u = sqrt(3*u+4)
    print("n = ",n)
    print("u = ",u)
    print("abs( u - 4 =)",abs(u-4))
```

```
> ecart(0.001)
n =  9
u =  3.99906594303996
abs(u - 4 =) 0.0009340569600397863
```

Exemple 2 : *Le problème de Bâle*

On donne $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n^2}$ et on veut calculer $S_n = u_1 + u_2 + \ ... + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$
On souhaite déterminer la somme de tous les termes de la suite.
« Si quelqu'un nous trouve et nous communique ce qui, jusqu'ici a échappé à nos efforts, grande sera notre reconnaissance » Jacques Bernoulli
Il a conjecturé que cette somme tendait vers $\frac{\pi^2}{6}$ mais c'est Euler qui l'a démontré de manière rigoureuse en 1741
Le nom vient du fait que Jacques Bernoulli et Leonhard Euler sont nés à Bâle.
Le programme ci-dessous permet donc d'approcher π. On se rend cependant compte qu'il n'est pas très efficace car il faut ajouter 1000 termes pour obtenir les deux premières décimales de π, bien loin des connaissances d'Amaury de Montpellier..

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
  s EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  s PREND_LA_VALEUR 0
  POUR k ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    s PREND_LA_VALEUR s+1/pow(k,2)
    FIN_POUR
  AFFICHER s
FIN_ALGORITHME
```

```python
from math import *
def somme1(n):
    s = 0
    for i in range(1,n+1):
        s = s +1/(i**2)
    print("somme(1/n^2)=",s)
    print("pour",n,"termes")
    print("Pi=",sqrt(6*s))
```

```
> somme1(1000)
somme(1/n^2)= 1.6439345666815615
pour 1000 termes
Pi= 3.1406380562059946
```

Dans le temps, π sera approché par d'autres moyens. Par exemple par Lui Hui à l'aide de la formule :

$$\pi \approx 768\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+1}}}}}}}}}$$

Avec ce calcul, on obtient : $\pi \approx 3{,}141590463236$

Que j'aime à faire connaitre ce nombre utile aux sages, Immortel Archimède …