Les fonctions trigonométriques

Capacités attendues en fin de chapitre :

- Résoudre une équation de type $cos(x) = a$, une inéquation $cos(x) \leq a$ sur $]-\pi; \pi]$
- Dans le cadre d'une résolution de problème, étudier une fonction simple définie à partir de fonctions trigonométriques pour déterminer des variations, un optimum.

Le mathématicien du chapitre :

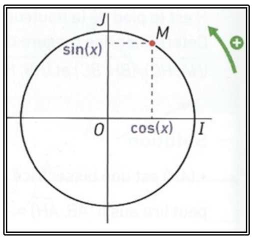
Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 -1830) est un mathématicien et physicien français. Il est connu pour avoir déterminé, par le calcul, la diffusion de la chaleur en décomposant une fonction quelconque en somme de fonctions trigonométriques. Cette méthode est devenue incontournable en théorie du signal. La compression d'images JPEG ou la technologie 4G en téléphonie en découlent.

1) Rappels de trigonométrie

Sauf précision contraire, l'unité utilisée est le radian. On considère un cercle trigonométrique C de centre O et de rayon 1. Le plan orienté est muni du repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$représenté sur la figure ci-dessous.

a) Cosinus et sinus d'un réel

Pour tout réel α, il existe un point M unique du cercle trigonométrique t
Que α soit une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$
• l'abscisse du point M est le **cosinus** de α, noté $cos(\alpha)$.
• l'ordonnée du point M est le **sinus** de α , noté $sin(\alpha)$.
On a donc : $\overrightarrow{OM} = cos(\alpha).\overrightarrow{OI} + sin(\alpha).\overrightarrow{OJ}$



Propriétés algébriques :

- Pour tout réel x, on a : $-1 \leq cosx \leq 1$ et $-1 \leq sinx \leq 1$ (repérage sur le cercle trigo)
- Pour tout réel x, $cos^2x + sin^2x = 1$ (relation fondamentale de la trigonométrie)

Exercice :

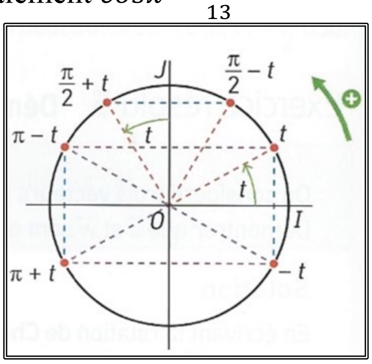
Déterminer la valeur exacte de $cosx$ sachant que $sinx = \frac{-12}{13}$ et que $x \in \left]\frac{-\pi}{2}; 0\right[$

Solution :

On utilise la relation fondamentale de la trigonométrie : $cos^2x + sin^2x = 1$
Soit en remplaçant $cos^2x + \frac{144}{169} = 1$. On a donc $cos^2x = \frac{25}{169}$
Il y a donc deux réponses possibles : $cosx = \frac{5}{13}$ ou $cosx = \frac{-5}{13}$ Puisque $x \in \left]\frac{-\pi}{2}; 0\right[$ il est donc situé dans le 4ème quadrant ou le cosinus est positif. On a donc finalement $cosx = \frac{5}{13}$

b) Les angles associés

Cette notion est si importante qu'elle fait l'objet d'un complément de cours.
Référez-vous donc à la Fiche Méthode : les angles associés.



c) Les valeurs exactes

Il faut absolument connaître les valeurs remarquables des angles de base. On peut ensuite retrouver en changeant de quadrant les valeurs d'autres angles en utilisant les angles associés. Le tableau basique est assez simple à comprendre.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$cosx$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$sinx$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Pour retenir ces valeurs, il suffit de se rendre compte que les valeurs du cosinus décroissent avec $\frac{\sqrt{4}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{0}}{2}$ et que les valeurs de sinus croissent, en d'autres termes, savoir compter de 0 à 4.

Remarque :

Les valeurs exactes se trouvent en calculant dans un triangle isocèle ou équilatéral

Exemples :

Donner les valeurs exactes des nombres suivants en utilisant les angles associés :

- $cos\frac{3\pi}{2} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$
- $sin\frac{7\pi}{2} = sin\left(4\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -1$
- $cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$
- $sin\frac{-2\pi}{3} = -sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

d) Relations d'addition, de duplication et de linéarisation

Pour tous réels a et b, on a les formules suivantes :

- **Addition :**

$$cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sin(a)sin(b)$$
$$cos(a-b) = cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b)$$
$$sin(a+b) = sin(a)cos(b) + sin(b)cos(a)$$
$$sin(a-b) = sin(a)cos(b) - sin(b)cos(a)$$

Remarque :

Petit moyen mnémotechnique : on a coutume de dire que le cosinus est raciste et menteur tandis que le sinus est le gendre idéal.

Exemples :

Ces formules permettent de donner les valeurs exactes pour des angles moins usuels. Ces valeurs seront retrouvées dans le chapitre sur les nombres complexes.

$cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = cos\left(\frac{\pi}{3}\right)cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + sin\left(\frac{\pi}{3}\right)sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ donc $cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Exercice :

Factoriser l'expression pour tout x réel : $A = cos(x) + sin(x)$

Le sens du mot factoriser est ici piégeur. En effet, l'apparition d'un produit n'est pas une évidence. Puisque l'exercice est dans la partie formules d'addition, il faut donc les utiliser mais il faut aussi en faire apparaître une. Le seul angle qui a un cosinus et un sinus égaux est $\frac{\pi}{4}$

$A = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}sin(x)\right)$ soit donc $A = \sqrt{2}\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right)cos(x) + sin\left(\frac{\pi}{4}\right)sin(x)\right)$

Soit donc $A = \sqrt{2}\,cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ qui aurait pu aussi s'écrire $A = \sqrt{2}\,sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$

Duplication :

Soit a un nombre réel, on a :

$$cos(2a) = cos^2(a) - sin^2(a) \qquad sin(2a) = 2cos(a)sin(a)$$

Exemple :

Donner la valeur exacte de $cos(\frac{\pi}{8})$

On écrit donc $cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = 2cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1$ soit en remplaçant $\frac{\sqrt{2}}{2} = 2cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1$

En isolant $\frac{2+\sqrt{2}}{4} = cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$ Puisque $\frac{\pi}{8}$ est dans le premier quadrant, $cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$

En inversant les formules de duplication, on obtient les formules ci-dessous.

Linéarisation :

Soit a un nombre réel, on a :

$$cos^2(a) = \frac{1 + cos(2a)}{2} \qquad sin^2(a) = \frac{1 - cos(2a)}{2}$$

e) Mesure principale

Propriété :

Une seule des mesures de l'angle appartient à l'intervalle$]-\pi\ ;\ \pi]$
Cette mesure est la mesure principale de l'angle.

Exemples :

- $\frac{\pi}{3}$ est une mesure principale.
- $\frac{5\pi}{3}$ n'est pas une mesure principale.
- $\frac{-2\pi}{3}$ est une mesure principale.
- $-\pi$ n'est pas une mesure principale.

Remarque :

Afin de déterminer si un angle est une mesure principale, il suffit de regarder si le numérateur est supérieur au dénominateur. On peut souvent trouver la réponse de tête mais dès que les nombres augmentent, un peu de technique est nécessaire.

Exercice :

Déterminer la mesure principale des deux angles suivants : $\frac{68\pi}{3}$ et $\frac{37\pi}{7}$

```python
from math import *
print ('entrer la valeur sous la forme A/B*pi')
A = int(input("entrer le numérateur:"))
B = int(input("entrer le dénominateur:"))
if A/B <0 :
  while abs(A/B)>1:
    A = A+2*B
else :
  while abs(A/B)>1:
    A = A-2*B
C = A
D = B
print("la mesure principale est:",C,"/",D,"Pi")
```

```
entrer la valeur sous la forme A/B*pi
entrer le numérateur:68
entrer le dénominateur:3
la mesure principale est: 2 / 3 Pi
```

On écrit : $\frac{68\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}(2\pi)$

```
entrer la valeur sous la forme A/B*pi
entrer le numérateur:37
entrer le dénominateur:7
la mesure principale est: -5 / 7 Pi
```

On écrit : $\frac{37\pi}{7} = \frac{-5\pi}{7}(2\pi)$

Remarque :

La mesure principale est aux angles ce que la fraction irréductible est aux fractions. La valeur la plus petite et la plus simple pour travailler.

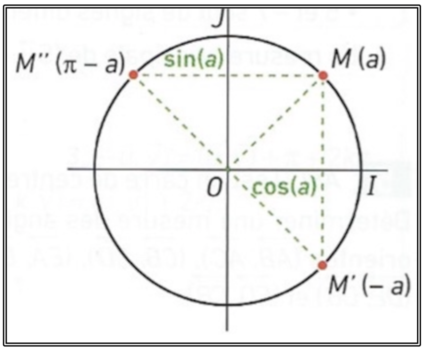
Remarque :

Modulo π siginifie à un demi-tour près.

2) ***Résoudre une équation ou une inéquation trigonométrique***

A l'aide des angles associés, on peut se rendre compte que si deux angles ont le même cosinus, c'est qu'ils sont soit égaux, soit opposés à un nombre de tour près.

De même si deux angles ont le même sinus, c'est qu'ils sont soit égaux, soit de somme égale à π à un nombre de tour près.
On peut donc résumer cela par les propriétés suivantes qui permettent de résoudre des équations.



a) ***Équations trigonométriques***

Propriétés :

Soient x *et* a deux nombres réels
$cos(x) = cos(a)$ équivaut à $x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k'\pi$ avec k *et* $k' \in \mathbb{Z}$
$sin(x) = sin(a)$ équivaut à $x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k'\pi$ avec k *et* $k' \in \mathbb{Z}$

Remarques :

- Attention, on peut être amené à résoudre des équations dans $\mathbb{R}$ qui présente donc une infinité de solutions ou dans $]-\pi\,;\,\pi]$ qui présente donc un nombre fini de solution.
- Lorsque on doit diviser l'égalité, il faut aussi penser à diviser le $2k\pi$
- On ne sait pas résoudre une équation $cos(x) = sin(y)$ mais on peut la transformer grâce aux angles associés.

Exemples :

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ $cos(x) = \frac{1}{2}$

  On remarque donc que $cos(x) = cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$
  On a donc $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi$ avec k *et* $k' \in \mathbb{Z}$
  On écrit $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi\,;\, -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi \text{ avec } k \text{ et } k' \in \mathbb{Z}\right\}$

- Résoudre dans $]-\pi\,;\,\pi]$ $sin(x) = sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

  On a donc $x = 3x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + 2k'\pi$ avec k *et* $k' \in \mathbb{Z}$
  On a donc $x = \frac{\pi}{8} + k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{16} + k'\frac{\pi}{2}$ avec k *et* $k' \in \mathbb{Z}$
  Dans $]-\pi\,;\,\pi]$ il y aura donc 2 réponses pour la première solution et 4 réponses pour la seconde. Pour obtenir ces solutions, on remplace *k* et *k'* par des valeurs qui permettent de faire un tour complet. On écrit $S_{]-\pi\,;\,\pi]} = \left\{\frac{\pi}{8}\,;\, -\frac{7\pi}{8}\,;\frac{5\pi}{16}\,;\frac{13\pi}{16}\,;\frac{-3\pi}{16}\,;\frac{-11\pi}{16}\right\}$
  Remarquons que $S_{[0\,;2\pi[} = \left\{\frac{\pi}{8}\,;\frac{9\pi}{8}\,;\frac{5\pi}{16}\,;\frac{13\pi}{16}\,;\frac{21\pi}{16}\,;\frac{29\pi}{16}\right\}$
  Pour les débutants, le tracé d'un cercle permet une meilleure compréhension.

- Résoudre dans $[0\,;2\pi[$ $sin(x) = cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

  On transforme à l'aide des angles associés : $sin(x) = cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
  $cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ permet donc d'écrire :
  $\frac{\pi}{2} - x = 2x - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $\frac{\pi}{2} - x = -\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 2k'\pi$ avec k *et* $k' \in \mathbb{Z}$
  On a donc $x = \frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{-\pi}{3} + 2k'\pi$ avec k *et* $k' \in \mathbb{Z}$

  On a donc $S_{[0\,;2\pi[} = \left\{\frac{2\pi}{9}\,;\frac{8\pi}{9}\,;\frac{14\pi}{9}\,;\frac{5\pi}{3}\right\}$

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ $sin^2(x) - \frac{3}{2}sin(x) - 1 = 0$

  On pose $X = sin(x)$ l'équation devient donc $X^2 - \frac{3}{2}X - 1 = 0$; A l'aide du discriminant, on a donc $sin(x) = 2$ ou $sin(x) = \frac{-1}{2}$

  La première équation étant impossible, on a donc $sin(x) = sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

  $x = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k'\pi$ avec $k\ et\ k' \in \mathbb{Z}$

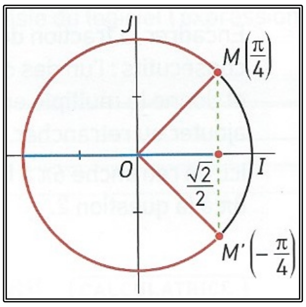
  On écrit $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{-\pi}{6} + 2k\pi\ ;\ \frac{7\pi}{6} + 2k'\pi \text{ avec } k\ et\ k' \in \mathbb{Z}\right\}$

b) *Inéquations trigonométriques*

Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ $cos(x) < \frac{\sqrt{2}}{2}$

On transforme donc $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ On cherche donc à déterminer un ensemble de valeurs. On trace sur le cercle trigonométrique.

On a donc $S_{]-\pi\ ;\ \pi]} = \left]-\pi\ ;\ -\frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4}\ ;\ \pi\right]$



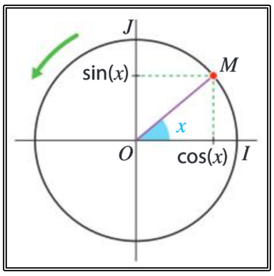
3) *Fonctions sinus et cosinus*

a) *Définitions*

Définition :

Soit M le point image d'un reel x sur le cercle trigonométrique dans un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. On a ainsi les coordonnées de $M(cos(x), sin(x))$.

- La fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$ par: $cos: x \mapsto cos(x)$
- La fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$ par: $sin: x \mapsto sin(x)$



b) *Dérivabilité de la fonction sin en 0 : activité d'approche*

- ***Expérimentation***

Pour étudier la dérivabilité de la fonction sinus en 0, on doit étudier la limite du taux d'accroissement matérialisé par l'expression :$\frac{sin(x)-sin(0)}{x-0} = \frac{sin(x)}{x}$

On doit donc étudier la limite de la fonction $f: h \mapsto \frac{sin(h)}{h}$lorsque h tend vers 0.

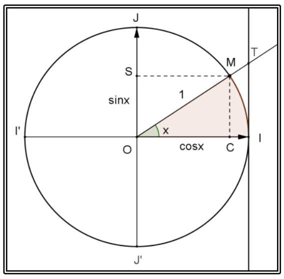
A l'aide de la calculatrice réglée en mode Radian, on obtient les valeurs $f(0{,}1) \approx 0{,}998$ $f(0{,}01) \approx 0{,}9999$. $f(-0{,}01) \approx 0{,}9999$. et $f(0{,}001) \approx 1$.

On peut donc conjecturer que la limite du taux d'accroissement se rapproche de 1 lorsque h se rapproche de 0. On conjecture donc que la fonction sinus est dérivable en 0 avec $sin'(0) = 1$

- ***Démarche géométrique***

Soit h un nombre réel de l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$et M l'image du réel h sur un cercle trigonométrique $(\mathcal{C})$ de centre O.

La droite (IT)est la tangente en I au cercle $(\mathcal{C})$.



1. Lorsque $h \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $cos(h) > 0$ $sin(h) > 0$ et $\tan(h) > 0$.
2. On peut utiliser le Théorème de Thalès dans le triangle OIT
   On a : $\frac{MC}{IT} = \frac{OC}{OI}$ soit $\frac{sinh}{IT} = \frac{cosh}{1}$ soit $IT = tanh$
3. On calcule les aires des triangles OIT, OIM. On a :

$A_{OIT} = \frac{IT}{2}$ puis $A_{OIM} = \frac{MC}{2}$ soit en remplaçant : $A_{OIT} = \frac{tanh}{2}$puis $A_{OIM} = \frac{sinh}{2}$.

L'aire du secteur circulaire $\widehat{OIM}$ vaut. $A_{\widehat{OIM}} = \frac{1}{2} \times 1^2 \times h = \frac{h}{2}$

On a donc l'encadrement $sinh \leq h \leq tanh$ puis que $hcosh \leq sinh$ puis que $cosh \leq \frac{sinh}{h} \leq 1$
On calcule la limite quand h tend vers 0 et on applique alors le théorème des gendarmes. On obtient donc $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{sin(h)}{h} = 1$

On choisit maintenant un nombre $h \in \left]-\frac{\pi}{2};0\right[$. On pose alors $h' = -h$. h'est donc un nombre positif qui vérifie $cosh' \leq \frac{sinh\prime}{h\prime} \leq 1$ soit alors $\cos(-h) \leq \frac{\sin(-h)}{-h} \leq 1$. A l'aide de la parité des fonctions trigonométriques, on a $h \in \left]-\frac{\pi}{2};0\right[$. $cosh \leq \frac{sinh}{h} \leq 1$. On obtient alors à l'aide du théorème des gendarmes que $\lim\limits_{h\to 0^-} \frac{sin(h)}{h} = 1$ et la fonction sinus est dérivable en 0.

Remarque :

On rappelle que l'aire d'un secteur circulaire de rayon R et de mesure αradian est $\frac{1}{2}R^2\alpha$.

Propriété :
La fonction sinus est dérivable en 0 et $sin'(0) = 1$, ce qui se traduit par $\lim\limits_{h\to 0} \frac{sin(h)}{h} = 1$

c) Dérivées des fonctions sinus et cosinus

Propriété :
La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, sin'(x) = cos(x)$
La fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, cos'(x) = -sin(x)$

Remarque :

Lorsqu'on dérive, on a l'habitude de dire qu'on descend. En regardant le cercle trigonométrique, la dérivée de sinus et cosinus apparaissent

Démonstration :

Pour montrer que sinus est dérivable, on doit évaluer le taux d'accroissement.
Soit x_0 un réel fixé. Pour tout réel $h \neq 0$,
$\frac{sin(x_0+h)-sin(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{sin(x_0+h)-sin(x_0)}{h}$ On utilise alors les formules d'addition pour simplifier le numérateur : $\frac{sin(x_0+h)-sin(x_0)}{h} = \frac{sin(x_0)cos(h)+sin(h)cos(x_0)-sin(x_0)}{h}$
En factorisant, on obtient : $\frac{sin(x_0+h)-sin(x_0)}{h} = sin(x_0) \times \frac{cosh-1}{h} + \frac{sinh}{h} \times cos(x_0)$
Puis à l'aide des formules de duplication :
$\frac{sin(x_0+h)-sin(x_0)}{h} = -sin(x_0) \times \frac{2sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{h} + \frac{sinh}{h} \times cos(x_0)$ puis en faisant apparaître la formule adaptée : $\frac{sin(x_0+h)-sin(x_0)}{h} = -sin(x_0) \times \frac{h}{2} \times \frac{2sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h^2}{2}} + \frac{sinh}{h} \times cos(x_0)$

Soit au final : $\frac{sin(x_0+h)-sin(x_0)}{h} = -sin(x_0) \times \frac{h}{2} \times \left(\frac{sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\right)^2 + \frac{sinh}{h} \times cos(x_0)$
Par passage à la limite quand h tend vers 0, on obtient :$\lim\limits_{h\to 0} \frac{sin(x_0+h)-sin(x_0)}{h} = cos(x_0)$

Pour démontrer la dérivabilité de la fonction cosinus, il suffit de remarquer que pour tout réel x, $sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ et d'appliquer le théorème relatif à la composée de deux fonctions dérivables :
$cos'(x) = sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = -sin(x)$ où u est la fonction $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$

4) Étude des fonctions sinus et cosinus

a) La fonction sinus

- ***Réduction du domaine d'étude***

La fonction sinus est $2\pi -$ périodique. On peut donc restreindre son étude sur une période, centrée en 0. On peut donc l'étudier sur $[-\pi;\pi]$
Puisque la fonction sinus est impaire, on peut alors réduire son étude sur $[0;\pi]$car sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine.

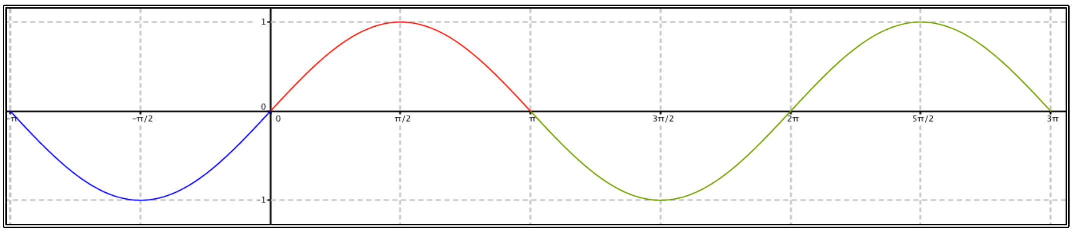
- ***Variations de la fonction sinus sur*** $[0;\pi]$

La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur$[0;\pi]$ On a donc $sin'(x) = cos(x)$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Sin'	+		-
Sin	$\nearrow$		$\searrow$

- ***Représentation graphique***

On note C la représentation graphique de la fonction sinus sur $\mathbb{R}$, C_0et C_1les représentations graphiques de la fonction sinus sur $[0;\pi]$ et $[-\pi;\pi]$ respectivement.
La fonction sinus étant impaire : C_1se déduit de C_0 par la symétrie centrale de centre O.
La fonction sinus étant $2\pi -$ périodique: C se déduit de C_1 par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$



b) La fonction cosinus

- ***Réduction du domaine d'étude***

La fonction cosinus est $2\pi -$ périodique. On peut donc restreindre son étude sur une période, centrée en 0. On peut donc l'étudier sur $[-\pi;\pi]$
Puisque la fonction cosinus est paire, on peut alors réduire son étude sur $[0;\pi]$car sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

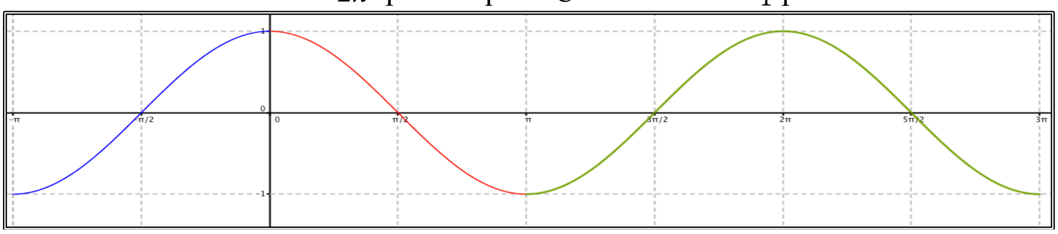
- ***Variations de la fonction cosinus sur*** $[0;\pi]$

La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$
donc sur $[0;\pi]$et $\cos'(x) = -sin(x)$

x	0	π
Cos'	-	
Cos	$\searrow$	

- ***Représentation graphique***

On note C la représentation graphique de la fonction cosinus sur $\mathbb{R}$, C_0et C_1les représentations graphiques de la fonction cosinus sur $[0;\pi]$ et $[-\pi;\pi]$respectivement.
La fonction cosinus étant paire : C_1se déduit de C_0par la symétrie axiale d'axe l'axe des ordonnées.
La fonction cosinus étant 2π-périodique : C se déduit de C_1 par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$



5) *Composée par une fonction affine*

Théorème :

Soit a et b deux réels.
La fonction $x \mapsto sin(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $x \mapsto acos(ax+b)$
La fonction $x \mapsto cos(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $x \mapsto -asin(ax+b)$

Remarque :

Il s'agit du cas particulier de la composition par une fonction affine.

Exemples :

- Si $f(x) = sin(-3x + \frac{\pi}{4})$ alors $D_f = \mathbb{R}$ et $f'(x) = -3cos(-3x + \frac{\pi}{4})$
- Si $f(x) = cos(4x - \frac{\pi}{6})$ alors $D_f = \mathbb{R}$ et $f'(x) = -4sin(4x - \frac{\pi}{6})$

6) Dérivées successives

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et
Il en résulte que les fonctions sinus et cosinus sont dérivables à tout ordre $n, n \in \mathbb{N}^*$ et on a :
$sin^{(2)}(x) = -sin(x)$ et que $cos^{(2)}(x) = -cos(x)$
Puis $sin^{(3)}(x) = -cos(x)$ et que $cos^{(3)}(x) = sin(x)$
Puis $sin^{(4)}(x) = sin(x)$ et que $cos^{(4)}(x) = cos(x)$

On peut prouver à l'aide d'un raisonnement par récurrence simple que :
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $sin^{(n)}(x) = sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ et que $cos^{(n)}(x) = cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

7) La fonction tangente

On définit la fonction tangente, notée tan , par : $tan(x) = \frac{sin\,(x)}{cos\,(x)}$

Tangente est définie si son dénominateur est non nul.
$cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ et donc $D_{tan} = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

a) Réduction du domaine d'étude

$$tan(\pi + x) = \frac{sin\,(\pi + x)}{cos\,(\pi + x)} = \frac{-sin\,(x)}{-cos\,(x)} = tan(x)$$

La fonction tangente est donc π -périodique. On peut donc restreindre son étude sur une période, centrée en 0. On peut donc l'étudier sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

Puisque la fonction tangente est impaire, on peut alors réduire son étude sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ car sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine du repère.

b) Variations de la fonction tan sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Par quotient, la fonction tangente est dérivable. On a alors :
$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} : tan(x)' = \frac{1}{cos^2 x} = 1 + tan^2 x$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
tan'	$+$	
tan	$\nearrow$	

c) Représentation graphique

On note C la représentation graphique de la fonction tangente sur son ensemble de définition :

$\mathcal{C}_0$ la représentation graphique de la fonction tangente sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$. $\mathcal{C}_1$ la représentation graphique de la fonction tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2};0\right]$. La fonction tangente étant impaire , $\mathcal{C}_1$ se déduit de $\mathcal{C}_0$ par la symétrie centrale de centre O.
La fonction tangente étant $\pi-$ périodique: C se déduit de $\mathcal{C}_1$ par translation de vecteur $\pi\vec{\imath}$