Le calcul intégral

Capacités attendues en fin de chapitre :

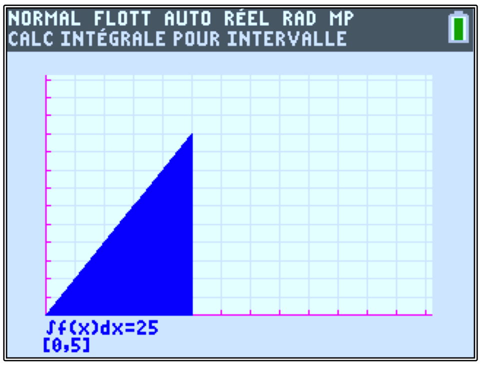
- Estimer graphiquement ou encadrer une intégrale, une valeur moyenne.
- Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive, à l'aide d'une intégration par parties.
- Majorer une intégrale à partir d'une majoration d'une fonction par une autre fonction.
- Calculer l'aire entre deux courbes
- Étudier une suite d'intégrales, vérifiant éventuellement une relation de récurrence.
- Interpréter une intégrale, une valeur moyenne dans un contexte.

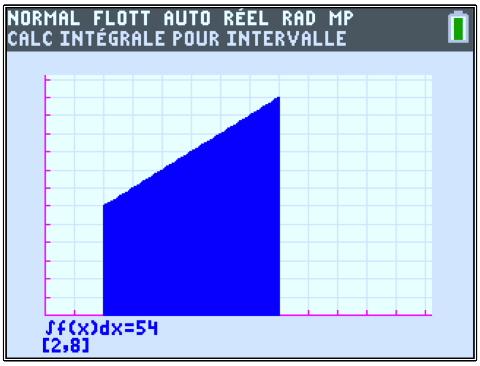
Le mathématicien du chapitre :

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866) est un mathématicien allemand né à Hanovre. Très jeune, il révèle un grand talent mathématique en résolvant des problèmes arithmétiques posés par son père. On lui doit d'important travaux sur les intégrales, poursuivants ceux de Cauchy, qui ont donnés entre autres ce qu'on appelle aujourd'hui les intégrales de Riemann.

1) Approche géométrique

On souhaite déterminer l'aire des deux formes tracées ci-dessous





On reconnait un triangle rectangle. On applique la formule apprise au collège.
$\mathcal{A} = \frac{b\times h}{2}$. Ici $\mathcal{A} = \frac{5\times 10}{2}$ soit $\mathcal{A} = 25$

On reconnait un trapèze. On applique la formule apprise au collège.
$\mathcal{A} = \frac{(b+B)\times h}{2}$. Ici $\mathcal{A} = \frac{(6+12)\times 6}{2}$ soit $\mathcal{A} = 54$

Ces deux domaines sont délimités par des fonctions affines et linéaires. Mais comment calculer l'aire d'un domaine dont le bord aurait une forme arrondie ?

2) Définition de l'intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, F et G deux primitives quelconques de f sur I.
On rappelle qu'il existe un réel k tel que $\forall x \in I, G(x) = F(x) + k$. a et b étant deux réels quelconques de I, comparons les nombres $G(b) - G(a)$ et $F(b) - F(a)$:
On a : $G(b) - G(a) = F(b) + k - F(a) - k = F(b) - F(a)$
Le réel $F(b) - F(a)$ est donc indépendant de la primitive de f choisie.

Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels quelconques de I.

L'intégrale de a à b de f est le nombre réel noté $\int_a^b f(x)dx$ défini par :

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur I.

Notation :

On note $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, notation qui sera commode dans les calculs.

Remarques :

- $\int_a^b f(x)dx$ se lit « Somme de a à b de $f(x)dx$ », a et b sont les bornes de l'intégrale.
- Le dx correspond à une largeur élémentaire mais n'a pas d'influence dans le calcul. Il s'agit simplement d'une notation.
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$, la variable x est dite muette.
- Pour justifier l'existence d'une intégrale, il suffit donc de vérifier que la fonction intégrée f soit continue sur l'intervalle des bornes.

Attention :

- $\int_{-1}^2 \frac{1}{x}dx$ n'existe pas car $0 \in [-1;2]$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas définie en 0.
- $\forall k \in \mathbb{R}\ \int_a^b kdx = [kx]_a^b = k(b-a)$.

Exemples :

Calculer les intégrales :

- $\int_1^3 2x + 5dx = [x^2 + 5x]_1^3 = 24 - 6 = 18$
- $\int_{ln2}^{ln3} \frac{e^x}{e^x - 1}dx = [ln(e^x - 1)]_{ln2}^{ln3} = ln(e^{ln3} - 1) - ln(e^{ln2} - 1) = ln(2)$

3) *Propriétés algébriques*

a) *Linéarité de l'intégrale*

Propriété :

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b deux réels quelconques de I.

(1) $\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

(2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \times \int_a^b f(x)dx$

Démonstration :

Soient F et G deux primitives quelconques de f et g sur I. On a alors :

$$\int_a^b f(x) + g(x)dx = [F(x) + G(x)]_a^b = F(b) - F(a) + G(b) - G(a)$$

$\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$

Conséquences :

$\int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ et donc $\int_a^b f(x) - g(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

b) *La relation de Chasles*

Propriété :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

Pour tous réels a, b et c de I, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Démonstration :

$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) = F(b) - F(c) + F(c) - F(a).$

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

Conséquences :

Si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors

- $\forall a \in I\ \int_a^a f(x)dx = 0$
- $\forall a \in I, \forall b \in I\ \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Démonstration :

$\int_a^a f(x)dx = [F(x)]_a^a = F(a) - F(a) = 0$,

$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) = -\big(F(a) - F(b)\big) = -\int_b^a f(x)dx$.

Exercice :

Calculer l'intégrale : $I = \int_0^2 |x^2 + x - 2|dx$

Solution :

Pour commencer, on étudie le signe de l'expression afin de faire disparaître la valeur absolue.
$x^2 + x - 2$ s'annule en 1 et -2. On a donc le signe du trinôme du second degré :

$$|x^2 + x - 2| = \begin{cases} -x^2 - x + 2 \text{ si } x \in [-2;1] \\ x^2 + x - 2 \text{ si } x \in]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[\end{cases}$$

On découpe alors l'intégrale à l'aide de la relation de Chasles.

$I = \int_0^2 |x^2 + x - 2|dx$ soit en décomposant $I = \int_0^1 -x^2 - x + 2dx + \int_1^2 x^2 + x - 2dx$.

$I = \left[\frac{-x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^2$ Soit $I = 3$ ua.

4) Intégrale et ordre

Théorème :

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b deux réels quelconques de I.

- Si $a \leq b$ et si $f \geq 0$ sur I, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
- Si $a \leq b$ et si $f \geq g$ sur I, alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

Démonstration :

On suppose que f est positive sur $[a;b]$. F, primitive de f sur $[a;b]$ est donc croissante. On a donc : si $a \leq b$ alors $F(a) \leq F(b)$. Et donc $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \geq 0$

5) Intégrale et primitive

Théorème :

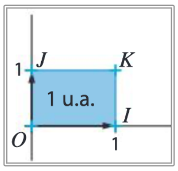
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$ fixé. Alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Exemple :

Le logarithme népérien peut être défini comme étant la primitive de la fonction inverse qui s'annule en 1. Ainsi, $\forall x \in]0;+\infty[, \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$

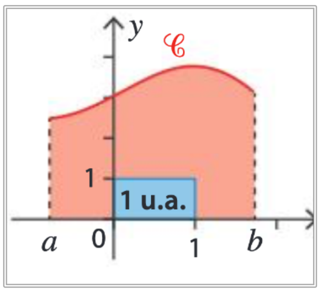
6) Intégrale et aire

Dans un repère orthogonal $(0\,;\,\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OJ})$, les points I, J et K ont pour coordonnées $I(1\,;0)$, $J(0\,;1)$ et $K(1\,;1)$
L'aire du rectangle $OIKJ$ est appelée unité d'aire du repère.
On la note u.a.



Théorème :

Soit f une fonction continue et positive sur $[a\,;b]$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le repère $(0\,;\,\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OJ})$.
$\forall x \in [a\,;b]$, On note $S(x)$ l'aire, en unité d'aires, du domaine délimité par $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les deux droites verticales d'équations $x = a$ et celle qui passe par x.
Alors $S: x \mapsto S(x)$ est dérivable sur $[a\,;b]$.
$\forall x \in [a\,;b], S'(x) = f(x)$

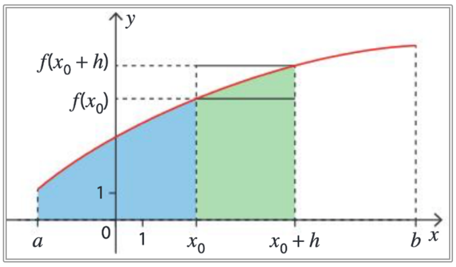


Démonstration :

La démonstration sera faite dans le cas d'une fonction continue, positive et croissante sur $[a\,;b]$, le résultat dans le cas général est admis.
Soit $x_0 \in [a\,;b]$ avec x_0 fixé et h un réel non nul tel que $x_0 + h \in [a\,;b]$.
$\forall x_0 \in [a\,;b]$, on associe $S(x_0)$ l'aire du domaine délimité comme ci-dessus.

Premier cas : $h > 0$

On souhaite encadrer l'expression $S(x_0 + h) - S(x_0)$
Cette expression correspond au domaine vert. On peut encadrer cette aire à l'aide des deux rectangles. On a :
$h \times f(x_0) \leq S(x_0 + h) - S(x_0) \leq h \times f(x_0 + h)$
$h > 0$ donc : $f(x_0) \leq \frac{S(x_0+h)-S(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h)$
Puisque f est continue en x_0, on a alors :



$\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(x_0 + h) = f(x_0)$. A l'aide du théorème des gendarmes : $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{S(x_0+h)-S(x_0)}{h} = f(x_0)$

Deuxième cas : $h < 0$

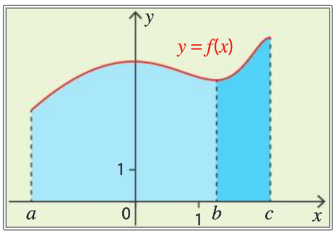
Encadrons cette fois-ci : $S(x_0) - S(x_0 + h)$. De la même manière, à l'aide des deux rectangles, $-h \times f(x_0 + h) \leq S(x_0) - S(x_0 + h) \leq -h \times f(x_0)$. En divisant par h, négatif, on a : $-f(x_0) \leq \frac{S(x_0)-S(x_0+h)}{h} \leq -f(x_0 + h)$ ou $f(x_0 + h) \leq \frac{S(x_0+h)-S(x_0)}{h} \leq f(x_0)$
On en déduit de la même manière que : $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{S(x_0+h)-S(x_0)}{h} = f(x_0)$
Alors, on peut affirmer que $S: x \mapsto S(x)$ est dérivable en x_0 et que $\forall x \in [a\,;b], S'(x) = f(x)$.
La fonction est $S: x \mapsto S(x)$ donc une primitive de f sur $[a\,;b]$.
On remarque que $S(a) = 0$ donc S est la primitive de f qui s'annule en a.
On a donc : $\forall x \in [a\,;b], S(x) = \int_a^x f(t)dt$

Propriété :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(0\,;\,\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OJ}\right)$. Soit $\mathcal{A}$ le réel mesurant l'aire, en unités d'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, alors $\mathcal{A} = \int_a^b f(x)dx\ \ (ua)$

Remarque :

- Le domaine est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$
- Avec cette notation, la relation de Chasles s'applique. On peut couper un domaine en deux parties en b.



Exemple :

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(0\,;\,\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OJ}\right)$ d'unités graphiques : 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée. Calculer en cm², l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan définie par : $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq e^x \end{cases}$ Donner une valeur approchée de cette aire au mm² près.

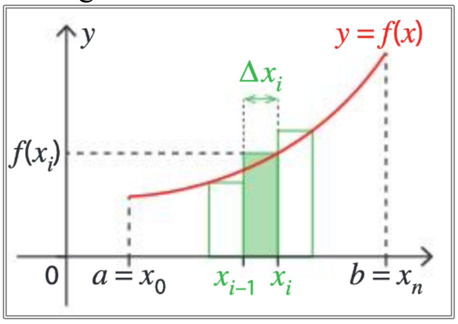
Solution :

On remarque que $x \mapsto e^x$ est continue et positive sur $[-1\,;1]$. On a alors : $\mathcal{A} = \int_{-1}^{1} e^x dx$
$\mathcal{A} = \int_{-1}^{1} e^x dx = [e^x]_{-1}^{1} = e - \frac{1}{e}(ua)$. On obtient donc $\mathcal{A} = 2 \times \left(e - \frac{1}{e}\right)$ soit $\mathcal{A} \approx 4{,}7\ cm^2$

7) *Déterminer une valeur approchée*

Nous avons déterminé comment trouver l'aire sous une courbe à l'aide de la notion de primitive. Mais comment faire lorsqu'on n'est pas capable de déterminer une primitive de la fonction qui borde le domaine. C'est la méthode dite des rectangles.

On encadre la courbe par des rectangles aussi petit que possible afin de perdre le moins d'aire. C'est évidemment la subdivision qui qui va permettre de limiter cette perte. Plus les rectangles sont petits en largeur, plus l'aire trouvée sera proche de la réalité. On peut encadrer l'aire par deux valeurs : la somme des rectangles tracés au-dessus de la courbe et la somme des rectangles tracés en-dessous de la courbe.



Exemple :

On souhaite déterminer $\mathcal{A} = \int_0^1 \sqrt{x^2+1}dx$. On ne connait pas de primitives de la fonction.

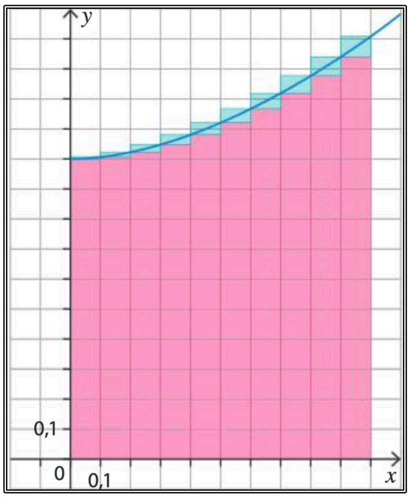
On va procéder à un découpage de l'intervalle $[0\,;1]$ en n subdivisions de même amplitude $\frac{1}{n}$.

Sur l'illustration, l'intervalle a été coupé en 10. On procède à un programme Python.

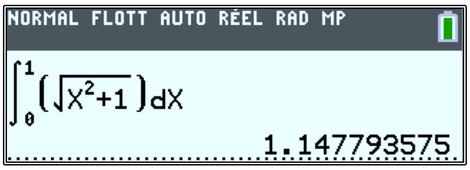
```python
from math import sqrt
def f(x):
    return(sqrt(x**2+1))
a = 0
b = 1
s = 0
n = int(input("n = "))
for i in range (n):
    s = s + f(i/n)*(1/n)
print("l'aire par défaut vaut:",s)
```

```
n = 10
l'aire par défaut vaut: 1.1276722258634868
```

```
n = 1000
l'aire par défaut vaut: 1.1475865268406993
```



Se pose la question de la performance. On voit qu'il faut engager une subdivision de l'intervalle en 1000 pour obtenir les 3 premières décimales de l'aire.



8) *Valeur moyenne et inégalité de la moyenne*

Définition :

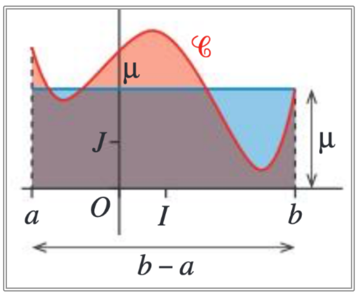
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ avec $a < b$. On appelle valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$ le nombre réel $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Illustration :

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative dans un repère orthogonal $(0\,;\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OJ})$ de la fonction f.

$$\mu \times (b-a) = \int_a^b f(x)dx$$

μ est donc le nombre réel pour lequel l'aire du rectangle est égale à l'aire sous la courbe.



<u>Exemple</u> :

La valeur moyenne de la fonction $x \mapsto cos(x)$ sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ est donnée par :

$\mu = \frac{1}{\frac{\pi}{2}-0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(x)dx = \frac{2}{\pi}[sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$.

<u>Interprétation cinématique :</u>

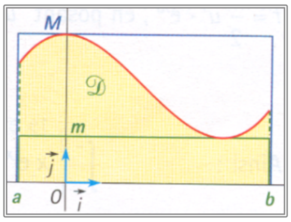
Un point mobile M est animé d'un mouvement rectiligne sur une droite munie d'un repère $(0\,;\,\vec{\imath})$. $\forall t \in [0\,;+\infty[$, on note $x(t)$ l'abscisse du point M dans le repère $(0\,;\,\vec{\imath})$. Si la fonction $t \mapsto x(t)$ est dérivable sur $[0\,;+\infty[$, la vitesse (instantanée) du point M à l'instant t est donnée par $v: t \mapsto \frac{dx(t)}{dt}$. Entre deux instants t_1 et t_2, $t_1 < t_2$ la vitesse moyenne du point M est donnée par : $V_{moyenne} = \frac{(x(t_2)-x(t_1))}{(t_2-t_1)}$. En transformant l'écriture, on a :

$V_{moyenne} = \frac{1}{(t_2-t_1)} \times \left(x(t_2) - x(t_1)\right) = \frac{1}{(t_2-t_1)}\int_{t_1}^{t_2}\frac{dx(t)}{dt}dt$

La vitesse moyenne du point M entre les instants t_1 et t_2 est donc la valeur moyenne de la vitesse calculée entre les instants t_1 et t_2.

<u>Théorème :</u>

Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$ (avec $a < b$).
Soient $m \in \mathbb{R}, M \in \mathbb{R}, \forall x \in [a\,;b]$ on ait $m \leq f(x) \leq M$, alors :
$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$



<u>Remarque</u> :

Le théorème de l'inégalité de la moyenne indique que lorsqu'une fonction a des valeurs comprises entre m et M, sa valeur moyenne est comprise entre m et M

<u>Exemple :</u>

Déterminer un encadrement de l'intégrale $\int_1^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

<u>Solution :</u>

On ne connaît pas de primitive à la fonction $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$. Il est donc naturel de l'encadrer.
$\forall x \in [1\,;2]$, on a : $1 \leq x^2 \leq 4$, soit aussi $-2 \leq -\frac{x^2}{2} \leq \frac{-1}{2}$. On peut composer par la fonction exponentielle qui est croissante sur $\mathbb{R}$, on a alors : $\frac{1}{e^2} \leq e^{-\frac{x^2}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$
On intègre cette double inégalité sur $[1\,;2]$:
$\int_1^2 \frac{1}{e^2}dx \leq \int_1^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dx \leq \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{e}}dx$ soit alors $\frac{1}{e^2} \leq \int_1^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dx \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$

9) *<u>Application du calcul intégral au calcul d'aires et de volumes</u>*

a) *<u>Aire limitée par une courbe et l'axe des abscisses</u>*

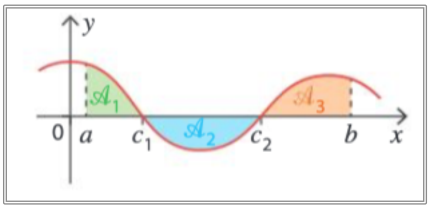
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(0\,;\,\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OJ}\right)$. Soit $\mathcal{A}$ le réel mesurant l'aire du domaine limité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$

<u>Premier cas :</u> f garde un signe constant sur $[a\,;b]$

- Si $f \geq 0$ sur$[a\,;b]$: $\mathcal{A} = \int_a^b f(x)dx\ \ (ua)$
- Si $f \leq 0$ sur $[a\,;b]$: $\mathcal{A} = -\int_a^b f(x)dx\ \ (ua)$

Deuxième cas : f change de signe sur $[a\,;b]$

On découpe alors l'intervalle $[a\,;b]$ autant de fois que nécessaire. On effectue alors la somme des aires algébriques sur les intervalles ou f est constante. Dans l'exemple ci contre, on a : $\mathcal{A} = \int_a^b f(x)dx = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3$



Exemple :

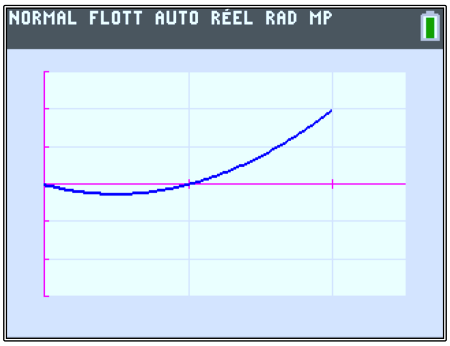
Calculer : $\mathcal{A} = \int_0^2 x^2 - xdx$

Solution :

$$\int_0^2 x^2 - xdx = -\int_0^1 x^2 - xdx + \int_1^2 x^2 - xdx$$

$$\mathcal{A} = -\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2$$

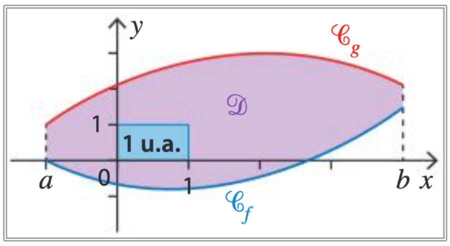
$$\mathcal{A} = 1\ (ua)$$



b) *Aire limitée par deux courbes*

Propriété :

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a\,;b]$ avec $a < b$ telles que $\forall x \in [a\,;b], f(x) \leq g(x)$. Alors l'aire de la partie du plan délimité par les courbes de f et g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est donnée en unités d'aires par : $\mathcal{A} = \int_a^b g(x) - f(x)dx$



Remarque :

Le domaine est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq g(x) \end{cases}$

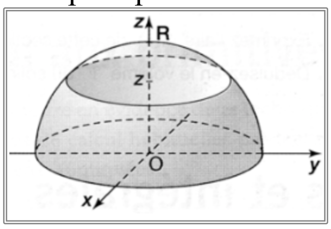
c) *Calcul du volume d'une boule*

Il suffit de trouver le volume d'une demi-boule de rayon R, et de le multiplier par 2.

On détermine l'aire d'un disque en fonction de l'altitude. Un calcul rapide donne $S(z) = \pi(R^2 - z^2)$

On intègre alors cette fonction sur $[0\,;R]$

$$\mathcal{V} = 2\int_0^R \pi(R^2 - z^2)dz = 2\pi\left[R^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3$$



10) *L'intégration par partie*

a) *Notion intuitive*

L'intégration par partie est une technique qui permet de déterminer parfois la primitive d'un produit. Cette technique ne fonctionne pas toujours mais permet dans certains cas de s'en sortir. On utilise la formule $(uv)' = uv' + u'v$ qu'on transforme en : $uv' = (uv)' - u'v$

En intégrant, on obtient : $\int uv' = uv - \int u'v$

L'IPP peut servir à calculer des primitives ou à calculer des intégrales. Cette technique permet de se ramener à un intégrale que l'on sait calculer.

Pour réussir une bonne IPP, il faut faire le bon choix au départ. Il faut d'abord présenter convenablement vos fonctions afin d'acquérir des habitudes. Il faut poser :

Dériver u	$u(x) = \ldots$	$v(x) =$	
	$u'(x) =$	$v'(x) = \ldots$	Intégrer v'

On choisit toujours pour u la fonction que l'on souhaite faire disparaître et pour v' la fonction que l'on va intégrer.
Par exemple, la fonction exp ne disparaitra jamais (donc n'est quasiment jamais u) et on ne connaît pas une primitive du ln (donc n'est jamais v'). De même, une fonction trigonométrique de disparaitra jamais. Il faut donc avoir un peu de flair (toujours lui…).
L'objectif étant de faire disparaître le produit. Même si le choix initial n'est pas bon, on peut faire une IPP. Malheureusement, on trouvera de nouveau une fonction dont on ne connaît pas de primitive. On peut avoir également des fonctions composées. Le calcul des primitives s'en trouvera alors plus difficile.

b) ***Exemples de calculs***

- Calculer $\int xcos(x)dx$

On pose : $u(x) = x \qquad v(x) = sin(x)$
$u'(x) = 1 \qquad v'(x) = cos(x)$

On a alors l'égalité : $\int xcos(x)dx = xsin(x) - \int sin(x)dx$
On a donc au final : $\int xcos(x)dx = xsin(x) + cos(x)$

- Calculer $\int xe^x dx$

On pose : $u(x) = x \qquad v(x) = e^x$
$u'(x) = 1 \qquad v'(x) = e^x$

On a alors l'égalité : $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x\, dx$
On a donc au final : $\int xe^x dx = xe^x - e^x$ soit $\int xe^x dx = (x-1)e^x$

- Calculer $\int xln(x)dx$

On pose : $u(x) = ln(x) \qquad v(x) = \frac{x^2}{2}$
$u'(x) = \frac{1}{x} \qquad v'(x) = x$

On a alors l'égalité : $\int xln(x)dx = \frac{x^2}{2}ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} dx$
On a donc au final :: $\int xln(x)dx = \frac{x^2}{2}ln(x) - \frac{x^2}{4}$

c) ***Calculer une intégrale***

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+2)e^{\frac{x}{2}}$
On souhaite obtenir une valeur approchée de : $\mathcal{A} = \int_0^1 (x+2)e^{\frac{x}{2}}dx$
Il faut donc procéder à une IPP pour pouvoir calculer l'intégrale. On présente de la même manière que pour une IPP classique.

On pose : $u(x) = (x+2) \qquad v(x) = 2e^{\frac{x}{2}}$
$u'(x) = 1 \qquad v'(x) = e^{\frac{x}{2}}$

On a alors : $\int_0^1 (x+2)e^{\frac{x}{2}}dx = \left[2(x+2)e^{\frac{x}{2}}\right]_0^1 - \int_0^1 2e^{\frac{x}{2}}dx$
$\int_0^1 (x+2)e^{\frac{x}{2}}dx = 6e^{\frac{1}{2}} - 4 - \left[4e^{\frac{x}{2}}\right]_0^1.$
$\mathcal{A} = 6e^{\frac{1}{2}} - 4 - 4\left(e^{\frac{1}{2}} - 1\right)$ soit $\mathcal{A} = 2\sqrt{e}\ (ua)$

Remarques :

- Parfois on doit procéder à plusieurs IPP successives pour trouver un résultat.
- L'IPP permet de trouver des primitives et des intégrales de fonctions présentant des produits. Cependant, parfois, une fonction composée permet de trouver la primitive.

11) Suites d'intégrales

$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx.$

On s'intéresse à la limite de la suite (I_n) quand *n* tend vers l'infini en utilisant les théorèmes généraux du cours sur les suites et les intégrales.

- ***Calcul du premier terme***

On calcule le premier terme. $I_0 = \int_0^1 e^{-x} dx$. On a alors : $I_0 = [-e^{-x}]_0^1 = 1 - \frac{1}{e}$

- ***Variation de la suite***

On évalue les variations de la suite (I_n). Pour cela, on évalue la différence.

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx - \int_0^1 x^n e^{-x} dx$$

$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^n (x-1) e^{-x} dx$ à l'aide de la linéarité de l'intégrale. Pour coller aux théorèmes du cours, on transforme $I_{n+1} - I_n = -\int_0^1 x^n (1-x) e^{-x} dx$. Ainsi la fonction intégrée est positive sur $[0\,;1]$. On a donc que $I_{n+1} - I_n \leq 0$

On a donc que la suite (I_n) est décroissante

- ***Convergence de la suite***

$\forall n \in \mathbb{N}, x \mapsto x^n e^{-x}$ est positive sur $[0\,;1]$

Donc $\int_0^1 x^n e^{-x} dx$ est positive.

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq I_0$

(I_n) est donc décroissante et minorée, elle est donc convergente. Mais on ne sait pas vers quel nombre tend la suite.

- ***Encadrement du terme général***

$\forall x \in [0\,;1], 0 \leq e^{-x} \leq 1$ car $\mapsto e^{-x}$ est décroissante sur $[0\,;1]$.

On peut donc encadrer I_n.

$\forall x \in [0\,;1], 0 \leq x^n e^{-x} \leq x^n$ soit $0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx$

En intégrant, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

A l'aide du théorème des gendarmes, $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$

Remarque :

On n'a pas calculé la valeur de l'intégrale. On pourrait chercher une relation entre deux termes consécutifs en utilisant une IPP et conjecturer une expression pour I_n.