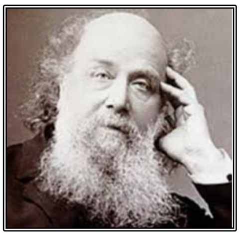
Initiation au calcul matriciel

Capacités attendues en fin de chapitre :

- Modéliser une situation par une matrice.
- Calculer l'inverse, les puissances d'une matrice carrée.
- Dans le cadre de la résolution de problèmes, utiliser le calcul matriciel, notamment l'inverse et les puissances d'une matrice carrée

Le mathématicien du chapitre :



James Joseph Sylvester (1814-1897) est un mathématicien anglais qui a introduit en 1850 le nom de matrice pour les tableaux de nombres qui étaient étudiés jusqu'alors. En anglais, le terme matrix provient de la racine latine mater. Il voit alors une matrice comme un objet donnant naissance à une autre famille d'objets mathématiques étudiés dès la classe de seconde appelés déterminants.

1) Introduction aux matrices

a) Exemple introductif

On souhaite résoudre le système linéaire de deux équations à deux inconnues ci-dessous.
$\begin{cases} 2x+3y=7 \\ x-4y=-2 \end{cases}$. Le couple solution de ce système se trouve aisément en utilisant les méthodes par substitution ou par combinaison linéaire vues en classe de seconde. Une nouvelle écriture est possible pour ce système : $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$
Ce tableau de nombres est appelé matrice du système et ce sont ces objets qui vont être étudiés cette année en maths expertes. On observe déjà ici que ces tableaux n'ont pas forcément la même taille en « largeur » et en « hauteur ».

b) Définitions et exemples

Définition :

- Une matrice est un tableau de nombres avec n lignes et p colonnes.
- Un terme de la matrice à n lignes et p colonnes est repéré par le numéro de la ligne et le numéro de la colonne auxquelles il appartient.

Notation :

Les matrices à n lignes et p colonnes sont des éléments de $\mathcal{M}_{n,p}$. On écrit alors la matrice avec ses coefficients sous la forme $M = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$

Exemples :

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{M}_{2,2}$. On a par exemple $a_{1,2} = 3$
- $C = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{M}_{2,1}$. On a par exemple $a_{2,1} = -2$
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{M}_{2,3}$. On a par exemple $a_{2,3} = 6$
- Un vecteur $\vec{u}(3,5)$ peut être vu comme une matrice ligne de $\mathcal{M}_{1,2}$

Définition :

- Une matrice ayant le même nombre de lignes et de colonnes est appelée une matrice carrée. Elles sont des éléments de $\mathcal{M}_{n,n}$
- Une matrice n'ayant qu'une colonne est appelée matrice colonne. Elles sont dans $\mathcal{M}_{n,1}$
- Une matrice n'ayant qu'une ligne est appelée matrice ligne. Elles sont dans $\mathcal{M}_{1,p}$

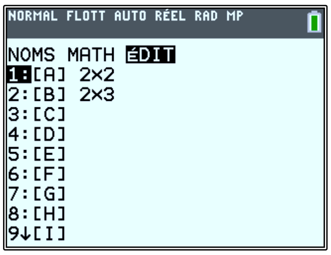
Exemples :

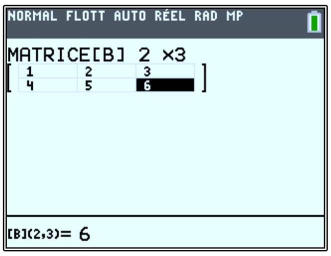
Avec les notations ci-dessus, A est une matrice carrée, C une matrice colonne.

c) Avec la TI-83

La calculatrice sait travailler avec les matrices. Elle affiche le résultat sous la forme d'un tableau de nombres. Si on souhaite afficher la matrice B ci-dessus, on effectue les manipulations suivantes à l'aide de la touche 

On peut choisir les dimensions de la matrice. On remarque l'écriture du terme avec les indices sur l'image de droite. On pourra ainsi effectuer des calculs avec la matrice.





d) Avec Python

Python ne sait pas afficher de matrices. Il n'existe pas de raccourci dans la bibliothèque. On peut cependant contourner le problème en utilisant les listes pour faire apparaitre un tableau de nombre. Le résultat n'est pas cependant fameux, la calculatrice semble mieux adaptée.

```python
from numpy import *
from numpy.linalg import *

def matrice():
    A = array([[3,5,1],[4,2,1],[-3,-1,7]])
    return A
```

```
> matrice()
array([[ 3,  5,  1],
       [ 4,  2,  1],
       [-3, -1,  7]])
```

2) Additionner des matrices

Exemple introductif :

On donne les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

Intuitivement, on a :

- $A + B$ n'a pas de sens.
- $A + A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$
- $A + D = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

> ***Définition :***
>
> L'addition de deux matrices de même taille se fait en additionnant les éléments situés au même endroit dans chaque matrice. L'opération se note classiquement $+$.

Remarque :

- Pour l'addition, la matrice nulle est l'élément neutre.
- Il n'est pas nécessaire que les matrices soient carrées pour les ajouter.

Exemple :

On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Alors $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

```python
from numpy import *
from numpy.linalg import *

def addition():
    A = array([[2,3],[1,-4],[-3,-1]])
    B = array([[1,4],[5,7],[3,2]])
    return A+B
```

```
> addition()
array([[3, 7],
       [6, 3],
       [0, 1]])
```

3) Produit de matrices

a) Produit d'une matrice par un réel

On reprend la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

Nous avons calculé ci-dessus la matrice $A + A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$.

On observe que $A + A = 2A = \begin{pmatrix} 2 \times 2 & 2 \times 3 \\ 2 \times 1 & 2 \times (-4) \end{pmatrix}$

Définition :

Soit A une matrice et k un nombre réel.
La matrice notée kA s'obtient en multipliant tous les éléments de A par k.
Par convention, on écrit k devant la matrice, à gauche.

Remarques :

- Si $k = 0$, A une matrice quelconque, alors kA est la matrice nulle.
- Si $k = -1$, A une matrice quelconque, alors $-A$ est la matrice opposée à A.
- Si A et B sont deux matrices, alors $A - B = A + (-1)B$. On définit ainsi la soustraction de matrices.

Exemple :

```
from numpy import *
from numpy.linalg import *

def soustraction():
  A = array([[5,3],[2,-4]])
  B = array([[-1,3],[8,7]])
  return A-B
```

```
> soustraction()
array([[  6,   0],
       [ -6, -11]])
```

b) Produit d'une matrice carrée par une matrice colonne ou ligne

Exemple introductif :

On donne les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$. On remarque que $A \in \mathcal{M}_{3,3}$ et que $B \in \mathcal{M}_{3,1}$. On peut donc effectuer le produit $A \times B$ car le nombres de colonnes de A est égal au nombre de ligne de B. Cependant, on ne peut pas effectuer le produit $B \times A$

```
from numpy import *
from numpy.linalg import *

def multiplication(x,y,z):
  A = array([[3,5,-1],[4,2,3],[1,2,3]])
  B = array([[x],[y],[z]])
  C = array([[3*x+5*y-z],[4*x+2*y+3*z],[x+2*y+3*z]])
  return C
```

```
> multiplication(1,2,-4)
array([[17],
       [-4],
       [-7]])
```

Définition :

Soit A une matrice carrée de taille n, et B une matrice colonne à n lignes.
Le produit $A \times B$ est une matrice colonne à n lignes qui s'obtient en multipliant termes à termes les lignes de A avec la colonne B.

Remarque :

Le produit de deux matrices est un bon exercice de calcul mental qui allie addition et multiplication d'entiers. On peut le présenter de différentes façons. A vous de choisir celle qui vous conviendra le mieux. On peut aussi évidemment utiliser la calculatrice afin de calculer le produit de matrices. Il suffit de rentrer les matrices et d'effectuer une multiplication classique. Cela dépend de la taille des nombres et de vos capacités.

c) Produit de deux matrices carrées de même taille

On donne les matrices carrées de taille 2 : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

Pour calculer $A \times B$, on « colle » la ligne de A sur la colonne de B.

$A \times B = \begin{pmatrix} 2 \times 5 + 3 \times 7 & 2 \times 6 + 3 \times 8 \\ 1 \times 5 + 4 \times 7 & 1 \times 6 + 4 \times 8 \end{pmatrix}$ Soit $A \times B = \begin{pmatrix} 31 & 36 \\ 33 & 38 \end{pmatrix}$

Pour effectuer $B \times A$, on procède de la même manière. On obtient $B \times A = \begin{pmatrix} 16 & 39 \\ 22 & 53 \end{pmatrix}$

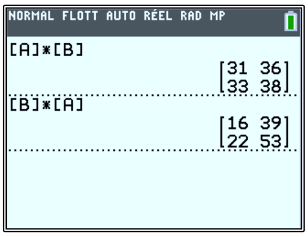
On observe que le produit de matrice n'est pas commutatif puisque $A \times B \neq B \times A$

Définition :

Soient A et B deux matrices carrées de taille n,
$A \times B$ est une matrice carrée de taille n. Les lignes de la matrice produit $A \times B$, notée aussi AB sont formées en multipliant les matrices lignes de A par la matrice B.

Exemple :

En reprenant les deux matrices ci-dessus, on obtient simplement avec la TI les deux produits $A \times B$ puis $B \times A$
Par chance, on obtient les mêmes résultats.
On se rend bien compte que l'ordre du produit est important lorsqu'on multiplie des matrices non carrées. Nous verrons plus loin qu'une matrice commute avec elle-même.



Propriétés admises :

Soient A, B et C trois matrices carrées de taille n,
$A \times B \times C = A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$

Remarques

- On dit que le produit de matrices est associatif (sans changer l'ordre).
- On reconnait la distributivité apprise en classe de 5ème.

d) Matrice diagonale

Définition :

On appelle matrice diagonale une matrice carrée constituée de termes tous nuls sauf ceux situés sur la diagonale. En d'autres termes, si $M = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, alors :

$\forall (i,j) \in [|1;n|], \begin{cases} a_{i,j} = 0 \text{ si } i \neq j \\ a_{i,i} \neq 0 \text{ si } i = j \end{cases}$

Remarque :

En réalité, les termes diagonaux peuvent être nuls. Il faut qu'un des termes diagonaux au moins soit non nul.

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas une matrice diagonale.

Définition :

On appelle matrice identité une matrice diagonale avec $\forall i \in [|1;n|], a_{i,i} = 1$

Remarque :

La notion de matrice identité n'a de sens que si la matrice est carrée. Dans $\mathcal{M}_{n,n}$, on la note I_n

La matrice identité est l'élément neutre pour la multiplication, que ce soit pour une multiplication à droite ou à gauche. La matrice I_n commute avec toutes les matrices

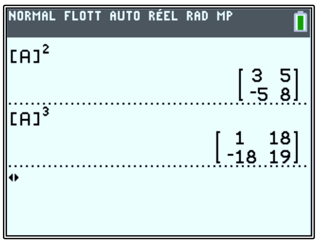
e) Puissance d'une matrice carrée

Définition :

Soit k un entier naturel non nul, on définit la puissance k-ième d'une matrice carrée A de taille n le produit de k facteurs, c'est-à-dire $A^k = A \times A \times A \times \ldots \times A$ avec k facteurs A

Exemple :

On donne la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. On peut calculer les puissances successives de A à l'aide de la calculatrice. On pourrait également construire un code en python avec une boucle for pour répéter le produit successif par la matrice A.



4) Inverser une matrice carrée

a) Inversibilité d'une matrice

En 4ème, vous avez appris la notion d'inverse d'un nombre non nul. Pour appel, a est l'inverse de b si on a, $a \times b = 1$ et $b \times a = 1$

Définition et propriété :

Une matrice carrée A d'ordre n non nulle est dite inversible s'il existe une matrice B non nulle telle que $A \times B = I_n$ et $B \times A = I_n$

Si A est inversible, alors son inverse est unique et on le note A^{-1}

Exemple :

On donne $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$. On calcul $A \times B$.

On obtient $A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On dit que B est l'inverse de A ou que A est l'inverse de B.

b) Inverser une matrice carrée de taille 2

Propriété :

On considère une matrice carrée de taille 2 notée $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec a, b, c et d quatre nombres réels non tous nuls.

A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

Démonstration :

On note $N = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ une matrice de taille 2.

$A \times N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & ba - ab \\ cd - dc & ad - bc \end{pmatrix} = (ad - bc)I_2$

De la même manière, $N \times A = (ad - bc)I_2$

- Si $ad - bc \neq 0$, on pose $B = \frac{1}{ad-bc}N$. A est inversible et B est l'inverse de A.
- Réciproquement, si A est inversible, il existe une matrice A^{-1}
  On a : $N = I \times N = (A^{-1} \times A) \times N = A^{-1} \times (A \times N) = A^{-1} \times (ad - bc)I_2$
  Si $ad - bc = 0$, alors N serait la matrice nulle ce qui contredit l'hypothèse. Donc N n'est pas nulle et on a : $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}N$

Remarque :

Le nombre $ad - bc$ est appelé déterminant du système. Les déterminants sont étudiés en détail en classe de MPSI

c) Écriture matricielle d'un système linéaire

Comme on l'a vu en introduction, les matrices servent notamment à résoudre des systèmes. On peut ainsi transformer l'écriture d'un système en une égalité matricielle avec une matrice carrée et des matrices colonnes. La détermination de l'inverse de la matrice permettra de résoudre le système.

Exemple :

On donne le système à trois équations à trois inconnues. $\begin{cases} x-2y+3z=2 \\ 2x-5y+2z=-2 \\ 3x-y+4z=11 \end{cases}$

On transforme alors avec les notions acquises au cours du chapitre

$$\begin{cases} x-2y+3z=2 \\ 2x-5y+2z=-2 \\ 3x-y+4z=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX=B \Leftrightarrow X=A^{-1}B$$

On trouve donc X est inversant la matrice A. En terminale, pour inverser une matrice carrée de taille 3, on utilise la calculatrice.

On obtient $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-18}{25} & \frac{5}{25} & \frac{11}{25} \\ \frac{-2}{25} & \frac{-5}{25} & \frac{4}{25} \\ \frac{13}{25} & \frac{-5}{25} & \frac{-1}{25} \end{pmatrix}$ puis $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ soit $S = \{(3;2;1)\}$

5) Matrices et transformations du plan

Dans toute cette partie, on se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan.
Soient a, b, c et d quatre nombres réels. Au collège, les transformations du plan sont les symétries centrales et axiales, la rotation et l'homothétie. La translation est introduite plus précisément en seconde avec l'apparition des vecteurs.
On définit $M(x;y)$et $M'(x';y')$ avec M', image de M par la transformation.

Définition :
Une translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ se définit par la relation vectorielle $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

Avec la notation matricielle, cette relation s'écrit $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Exemple :

Soit la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. On a alors $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

L'écriture matricielle n'a pas un grand intérêt pour les translations car les coordonnées « restent à leurs places »

Propriété :
Pour les transformations géométriques planes, on définit la matrice de transformation $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ qui vérifie $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

- Pour une symétrie axiale par rapport à (xx'), $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- Pour une symétrie axiale par rapport à (yy'), $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Pour une rotation de centre O et d'angle θ, $T = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$
- Pour une homothétie de centre O et de rapport k, $T = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

Remarque :

Une symétrie centrale de centre O est une rotation de centre O et d'angle π