Graphes Orientés

Capacités attendues en fin de chapitre :

- Modéliser une situation par un graphe.
- Vocabulaire sur les graphes.
- Étudier un graphe Éulerien.
- Notion de matrice d'adjacence.
- Calculer le nombre de chemins de longueurs donnée entre deux sommets d'un graphe

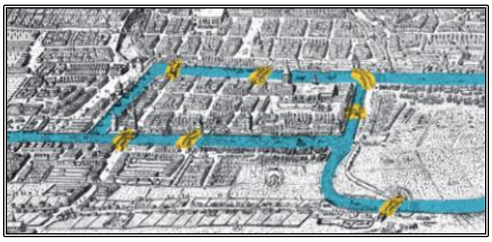
Le mathématicien du chapitre :

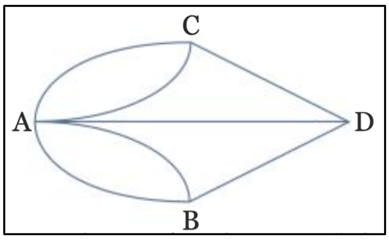
Claude Berge (1926-2002) est un mathématicien et artiste français. Bien que les graphes datent d'Euler, il développa la théorie des graphes et l'analyse combinatoire avec son livre publié en 1958. Il crée la notion de graphe parfait. Il pose une conjecture qui ne sera démontrée que bien plus tard. Il fut aussi un auteur de romans, notamment policiers, remarqué. Il est pour l'histoire l'arrière-petit-fils du président Félix Faure.

1) Graphe non orienté

a) Introduction de la notion de Graphe

Lors de ses nombreux voyages à travers l'Europe, Léonhard Euler arrive à Königsberg (aujourd'hui appelée Kaliningrad en Russie). Il est confronté à un problème posé par les habitants de la ville : est-il possible de se promener dans la ville en passant par les sept ponts de la ville qui enjambent la Prégolia une et une seule fois.





Euler raisonne alors sur un schéma de type nouveau qui est une figure géométrique dont la forme et la longueur des arêtes n'ont pas d'importance. Il donnera alors naissance à deux nouveaux domaines mathématiques : la topologie, étudiée dans le supérieur et la théorie des graphes développée en maths expertes.

Solution :

La ville est partagée en 4 zones reliées par des ponts. A représente l'île, elle est reliée par 7 ponts qui correspondent aux 7 arrêtes. Euler montra que la promenade n'était pas possible, qu'on exige ou non de revenir au point de départ.
De nos jours, les graphes sont utilisés dans de nombreux domaines : l'économie, la sociologie mais aussi les réseaux sociaux.

b) Vocabulaire et définitions

Définitions :

- Un graphe est une représentation composée de sommets (les points) reliés par des arêtes.
- L'ordre d'un graphe est le nombre de sommets.
- Deux sommets reliés par une arête sont dits adjacents.
- Une arête est une boucle si elle relie un sommet à lui-même.
- Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet.
- Un graphe est dit simple si au plus une arête relie deux sommets et s'il n'y a pas de boucle sur un sommet.

Exemple :

Les ponts de Königsberg représentent un graphe non simple avec :

- 4 sommets
- 7 arêtes qui représentent les 7 ponts.
- C et B ne sont pas adjacents.
- Le sommet A est de degré 5.

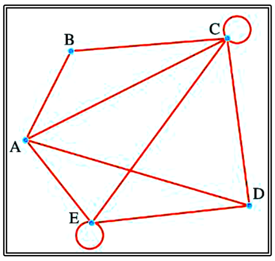
Théorème :

Dans un graphe simple non orienté :

- La somme des degrés des sommets est égale au double du nombre d'arête.
- Le nombre de sommets de degré impair est pair.

Exercice :

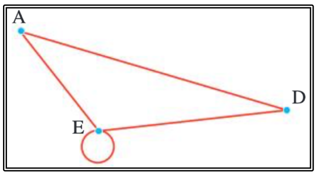
On considère le graphe ci-contre. Compléter le texte ci-dessous.



1. L'ordre du graphe est 5 car le graphe possède cinq sommets.
2. Ce graphe n'est pas simple car il possède deux boucles.
3. La somme des degrés des sommets vaut 20. Il y a 10 arêtes.
4. Les sommets B et D ne sont pas adjacents.

Remarque :

Le graphe ci-contre est un sous graphe du graphe ci-dessus. Il n'est pas simple. Il possède 3 sommets et 4 arêtes. On dit qu'il est complet.

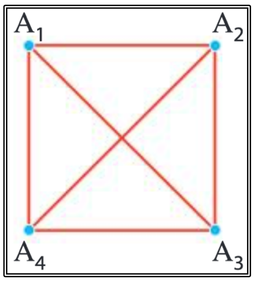


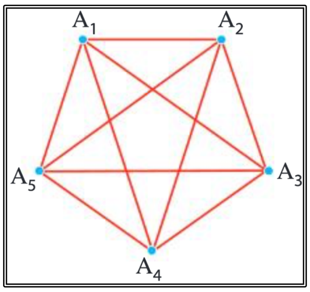
Définitions :

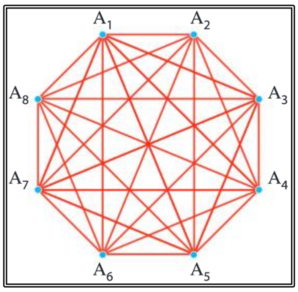
Un graphe est dit complet lorsque tous ses sommets sont deux à deux adjacents.

Exemples :

Ci-dessous, voici plusieurs graphes complets, de différents ordres.







Pour le graphe d'ordre 5, c'est un graphe complet comportant 10 arêtes. Ce graphe est simple. On peut extraire de ce graphe plusieurs sous-graphes complets d'ordre 4.

2) *Se déplacer sur un graphe non orienté*

a) *Notion de chaîne*

Définitions :

Dans un graphe non orienté, on a les définitions suivantes.

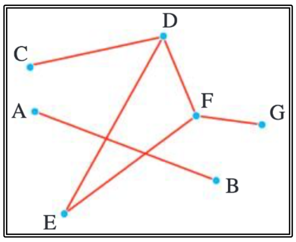
- Une chaîne est une suite d'arêtes consécutives reliant deux sommets.
- La longueur d'une chaîne est le nombre d'arête la composant.
- Une chaîne est dite fermée si le premier et le dernier sommet sont confondus.
- Un cycle est une chaîne fermée dont toutes les arêtes sont distinctes.
- Un graphe est dit connexe si deux sommets distincts quelconques peuvent être reliés par une chaîne.

Remarque :

S'il existe une chaîne qui passe par tous les sommets du graphe, alors il est connexe.

Exemple :

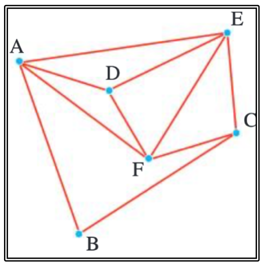
On donne le graphe ci-contre. Il est d'ordre 7.
Ce graphe n'est pas complet car A n'est pas adjacent à C.
Il n'est pas connexe car il n'existe pas de chaîne reliant B à G.
D-F-E-D est un cycle de longueur 3
G-F-E-D-F-G est une chaîne fermée de longueur 5.
DEF est un sous-graphe complet d'ordre 3.



Exercice :

On donne le graphe ci-contre.

1) Quel est l'ordre du graphe ?
2) Ce graphe est-il complet ?
3) Déterminer une chaîne fermée de longueur 4.
4) Donner un sous-graphe complet d'ordre 4.
5) Donner un sou-graphe connexe d'ordre 4.



Solution :

1) Le graphe est d'ordre 6.
2) Ce graphe n'est pas complet car A et C ne sont pas adjacents.
3) La chaîne A-E-C-B-A est fermée de longueur 4.
4) AEDF est un sous graphe complet d'ordre 4.
5) AECD est un sous graphe connexe d'ordre 4.

b) Chaîne Eulérienne

Définition :

Une chaîne Eulérienne est une chaîne qui contient chaque arête du graphe une et une seule fois.
Un cycle Eulérien est une chaîne Eulérienne fermée.

Remarque :

La chaîne Eulérienne correspond donc au problème des ponts de Königsberg

Théorème d'Euler :

Dans le cadre d'un graphe non orienté, un graphe connexe admet une chaîne Eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair vaut 0 ou 2.

Exemple :

Avec l'exemple initial, on a :

Sommets	A	B	C	D
Degré	5	3	3	3

Le graphe a donc 4 sommets de degré impair. Il n'existe pas de chaîne Eulérienne et le problème posé par les habitants de Königsberg n'a pas de solution.

Propriétés :

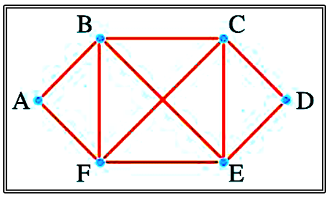
- Un graphe connexe admet un cycle Eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.
- Si le graphe connexe a deux sommets de degré impair, ce sont les extrémités de la chaîne Eulérienne.
- Un graphe ayant plus de deux sommets de degré impair ne possède pas de chaîne Eulérienne.

Remarque :

La connaissance des degrés permet rapidement de savoir si une chaîne ou un cycle existent.

Exemple :

Le graphe ci-contre indique les parcours possibles entre les six bâtiments d'une entreprise. Un agent de sécurité effectue régulièrement des rondes de surveillance en partant de l'entrepôt A. Existe-t-il un chemin de ronde pour l'agent de sécurité qui lui permette de passer par tous les chemins une seule fois ?

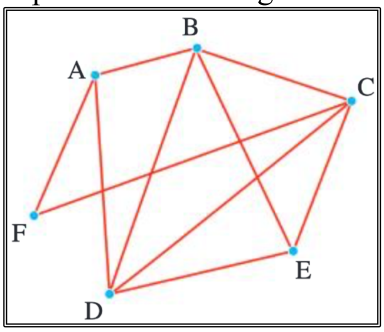


Solution :

On cherche donc l'existence d'un cycle Eulérien. Le graphe est connexe et n'a que des sommets de degré pair. Il existe donc un cycle Eulérien. L'agent de sécurité peut donc effectuer une ronde en partant de A et en passant par tous les chemins de l'entreprise. Par exemple : A-B-F-C-E-B-C-D-E-F-A ou A-F-C-E-B-C-D-E-F-B-A

c) *Déplacement d'une fourmi sur un graphe*

Une fourmi est au point A sur le graphe ci-dessous. Le graphe est simple et connexe. La fourmi se déplace sur le graphe de manière aléatoire. A chaque fois qu'elle arrive à un sommet, elle choisit au hasard une arrête. On va construire une fonction Python qui permet de connaitre la position de la fourmi après n déplacements. Il s'agit d'une marche aléatoire.




```
> sommet(3)
'E'
> sommet(1)
'D'
> sommet(3)
'B'
> sommet(10)
'F'
```

```python
LA=['B','D','F']
LB=['A','D','E','C']
LC=['B','F','D','E']
LD=['A','B','C','E']
LE=['B','C','D']
LF=['A','C']

from random import randint
def sommet(n):
  position ='A'
  for k in range(n):
    if position =='A':
      position = LA[randint(0,2)]
    elif position =='B':
      position = LB[randint(0,3)]
    elif position == 'C':
      position = LC[randint(0,3)]
    elif position =='D':
      position = LD[randint(0,3)]
    elif position =='E':
      position = LE[randint(0,2)]
    elif position == 'F':
      position = LF[randint(0,1)]
  return position
```

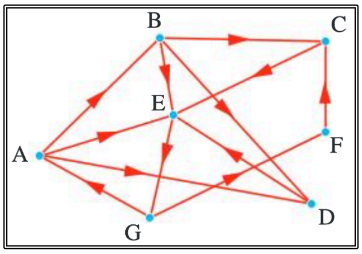
Pour se retrouver en E après 3 mouvements, la fourmi a pu suivre les parcours A-B-D-E ou A-F-C-E.

6) *Graphe orienté*

a) *Définition*

Exemple introductif :

Sur le graphe simple d'ordre 7 ci-contre, des flèches apparaissent. Elles indiquent le sens de parcours des arêtes, comme une rue en sens interdit. Le trajet sur le graphe s'effectue alors en respectant le sens. Il y a par exemple 3 arêtes qui partent de A mais une seule qui y arrive.



Définition :

Un graphe est orienté lorsque ses arrêtes sont définies par une origine et une extrémité. Une flèche indique le sens de parcours sur l'arête. Dans ce cas, les arêtes sont appelées arc. On parle alors de degré d'un sommet pour le nombre d'arc dirigés vers le sommet.

Remarque :

Presque toutes les définitions et notions précédentes s'appliquent dans le cas d'un graphe orienté.
Seule la notion de graphe complet et le théorème d'Euler sont en défaut.

b) *Matrice d'adjacence d'un graphe*

- ***Définition***

Définition :

La matrice associée à un graphe complet d'ordre n est la matrice carrée de taille n, où le terme de la i-ème ligne et la j-ème colonne est égal au nombre d'arêtes reliant les sommets i et j. On l'appelle la matrice d'adjacence du graphe

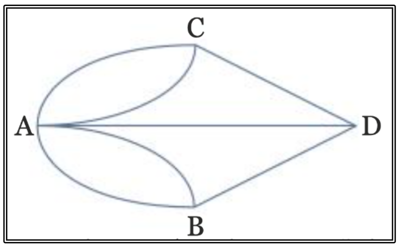
Remarque :

Si le graphe est simple, la diagonale ne comporte que des zéros.

- ***Cas d'un graphe non orienté***

On reprend l'exemple de Königsberg cher à Euler. On construit la matrice d'adjacence en plaçant le nombre d'arête sur les coefficients reliant les deux points.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



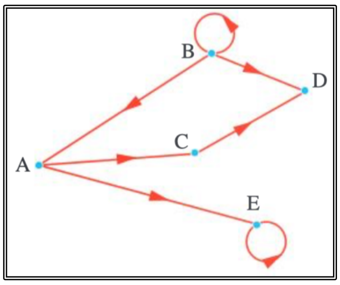
Remarque :

La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est toujours symétrique.

- ***Cas d'un graphe orienté***

On donne le graphe orienté non simple d'ordre 5 ci-contre. La matrice d'adjacence ne comportera que des 1 puisqu'il n'y a qu'un arc à chaque fois qui relie deux sommets. Elle ne sera pas symétrique puisque le sens de parcours a de l'importance ici.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Remarque :

Ce graphe possède deux sommets de degré impair, A et B. On voit qu'il n'existe pas de chaîne Eulérienne car deux arcs arrivent en D ce qui rend impossible la création d'une chaîne. C'est un contre-exemple pour montrer que le théorème d'Euler est faux ici.

- ***Nombre de chemin de longueur donnée***

Propriété :

On considère un graphe d'ordre n et on note M sa matrice d'adjacence.
Le nombre de chemin de longueur p reliant deux sommets i et j est donné par le terme de la i-ème ligne et la j-ème colonne de la matrice M^p noté ${m_{ij}}^{(p)}$

Remarque :

Dès que l'ordre du graphe est supérieur à 2, c'est la calculatrice qui effectue les calculs. Il devient rapidement compliqué de calculer des puissances de matrices car les calculs s'envolent.

Démonstration :

On considère un graphe G d'ordre n et on note $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ ses sommets. On note M la matrice d'adjacence associée à ce graphe dont le coefficient de la i-ème ligne et la j-ème colonne sera noté m_{ij}.

On va effectuer un raisonnement par récurrence qui va porter sur p.
On note :(P_p): Le nombre de chemin de longueur p reliant deux sommets i et j est donné par le terme de la i-ème ligne et la j-ème colonne de la matrice M^p noté ${m_{ij}}^{(p)}$

Initialisation :

Pour $p = 1$, $M^1 = M$. Par la définition de la matrice d'adjacence, ${m_{ij}}^{(1)} = m_{ij}$ désigne le nombre de chemin pour aller de x_ià x_j. La propriété est donc initialisée.

Hérédité :

On suppose qu'il existe un entier $p-1$ tel que (P_{p-1}) soit vraie et on veut montrer (P_p).
A l'aide du calcul matriciel, on a : $M^p = M^{p-1} \times M$. On a alors par la construction de la multiplication matricielle :

$$ {m_{ij}}^{(p)} = \sum_{l=1}^{n} {m_{il}}^{(p-1)} \times m_{lj} $$

Par hypothèse de récurrence, ${m_{il}}^{(p-1)}$ est le nombre de chemin de longueur $p-1$ allant de x_ià x_l. Par construction, m_{lj} est le nombre de chemin de longueur 1 allant x_là x_j, et en particulier, il est égal à 1 si $x_l - x_j$ est une arrête du graphe et 0 sinon.
Ainsi le produit ${m_{il}}^{(p-1)} \times m_{lj}$ donne pour une valeur de l donnée le nombre de chemins de longueur p allant de x_là $x_j$dont la dernière arrête est $x_l - x_j$.
En sommant sur l, on obtient tous les chemins de longueur p allant de x_ià x_j, quelques soit le début de la dernière arrête.
La propriété est donc héréditaire.

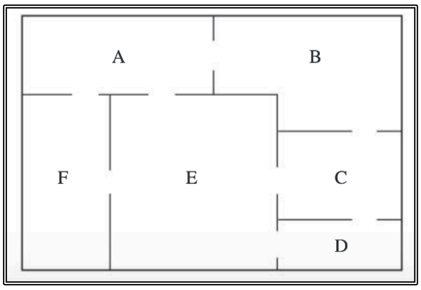
Conclusion :

Le nombre de chemin de longueur p reliant deux sommets i et j est donné par le terme de la i-ème ligne et la j-ème colonne de la matrice M^p noté ${m_{ij}}^{(p)}$

Exercice :

Un appartement est représenté par le plan ci-contre. On construit un graphe dont les sommets représentent les pièces et les arêtes représentent les portes de communication.

Est-il toujours possible de relier deux pièces différentes en empruntant exactement 3 portes ?



Solution :

Il s'agit donc d'un graphe simple non orienté d'ordre 6. On construit la matrice d'adjacence.

$$ M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ Soit en évaluant la puissance 3 de } M,\ M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 & 3 & 7 & 4 \\ 5 & 0 & 5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 4 & 7 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 5 & 2 \\ 7 & 2 & 7 & 5 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} $$

Pour pouvoir relier deux pièces différentes en empruntant exactement 3 portes, il faut que tous les coefficients non diagonaux de la matrice soient tous non nuls. C'est le cas ici.
Il y a par exemple 7 chemins de longueur 3 qui permettent de passer de A à E.