Géométrie repérée

Capacités attendues en fin de chapitre :

- Notions de coordonnées, différents types de repères.
- Calculer la distance entre deux points.
- Déterminer les coordonnées du milieu d'un segment
- Établir que trois points sont alignés..

Le mathématicien du chapitre :

René Descartes (1596-1650) est un mathématicien, physicien et philosophe français. On lui doit, en tant que philosophe le célèbre : « je pense donc je suis ».
Il contribue à une évolution majeure des mathématiques en créant la géométrie analytique qui permet de résoudre des problèmes géométriques en utilisant des coordonnées et des méthodes algébriques.

1) Repérage sur une droite graduée

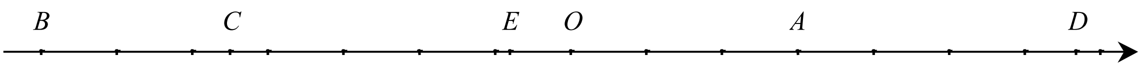
Définition : Soit Δ une droite du plan. Une droite graduée est définie par :

a) une origine, en général notée O.
b) une graduation.
c) une orientation (sens du parcours)
Un point sur cette droite graduée est repéré par un nombre appelé abscisse.

Remarque :

- La droite n'est pas nécessairement orientée vers la droite, dans le sens naturel.
- L'unité n'est pas non plus obligatoirement 1.

Exemple :



Sur la droite graduée ci-dessus d'unité 2, d'origine O, on a placé des points.
Compléter leur abscisse respective :

- $A(+6)$
- $B(-14)$
- $C(-9)$
- $D(+13{,}7)$
- $E(-1{,}8)$

2) Repères du plan

1) Définition

Définition : Un repère du plan est constitué de :

a) deux droites orientées.
b) une origine commune.
c) une graduation sur chaque droite.

Remarques :

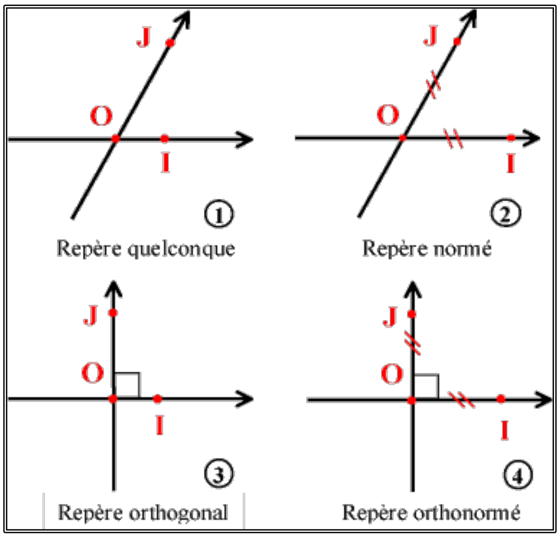
- La graduation n'est pas nécessairement la même sur chaque axe du repère.
- Il existe des repères de l'espace avec trois axes gradués, le troisième axe correspondant à l'altitude.

Exemples :

Lorsque les graduations sont identiques, on dit que le repère est ***normé***.

Lorsque les droites sont perpendiculaires, On dit que le repère est ***orthogonal***.

Lorsque les deux conditions sont réunies, ont dit que le repère est ***orthonormé***.

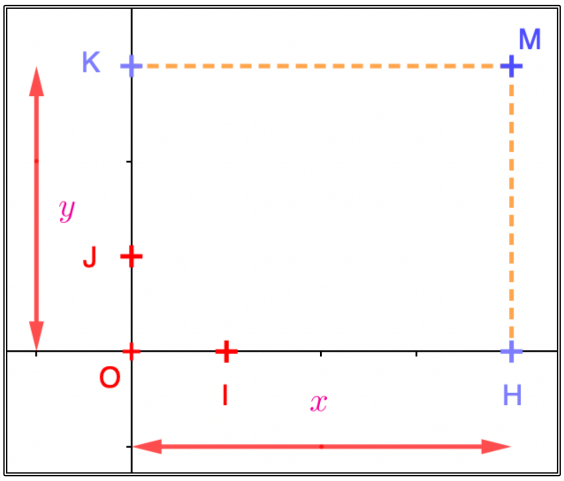


Exemples :

- Le carrelage sur le sol d'une pièce peut être un repère, à condition que les carreaux soient tous identiques. Il faut seulement choisir une origine et des orientations.
- Il existe d'autres repères comme les méridiens et les parallèles pour les coordonnées GPS (mais puisque la terre n'est pas plate-hypothèse avancée par Thalès dès le VIIème siècle avant JC- on n'est plus dans un repère du plan)

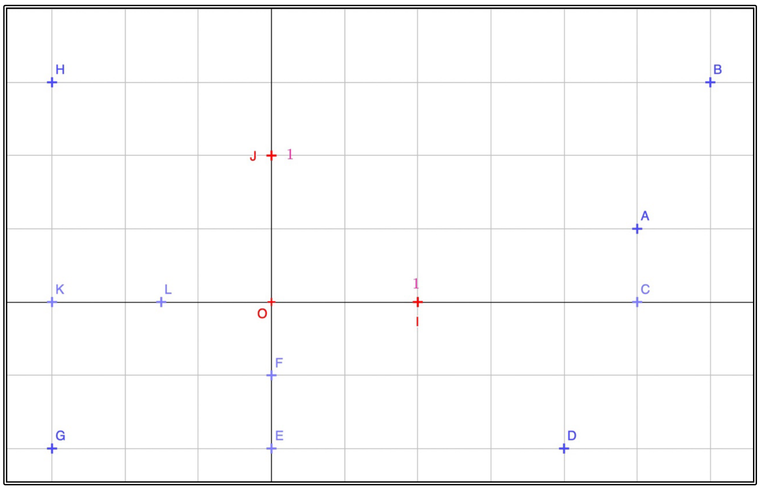
2) ***Coordonnées d'un point dans un repère***

Soit M un point du plan muni du repère (O, I, J).
En traçant la parallèle à chaque axe passant par M, on obtient deux points H et K.
Il existe un unique réel x et un unique réel y tels que $OH = x \times OI$ et $OK = y \times OJ$
On dit que (x, y) est le couple des coordonnées de M dans le repère (O, I, J)



Exercice :

Lire les coordonnées des points ci-contre dans le repère (O, I, J)
$A(2{,}5; 0{,}5)$ $B(3; 1{,}5)$
$C(2{,}5; 0)$ $D(2; -1)$
$E(0; -1)$ $F(0; -0{,}5)$
$G(-1{,}5; -1)$ $H(-1{,}5; 1{,}5)$
$I(1; 0)$ $J(0; 1)$
$K(-1{,}5; 0)$ $L(-0{,}75;)$



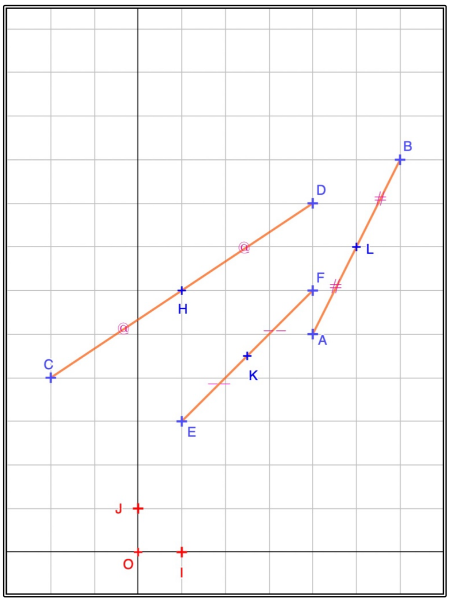
3) Milieu d'un segment

Dans le repère ci-contre, placer les points donnés et lire les coordonnées du milieu du segment formé par les deux points.

$A(4;5)$
$B(6;9)$
$L(5;7)$

$C(-2;4)$
$D(4;8)$
$H(1;6)$

$E(1;3)$
$F(4;6)$
$K(2{,}5;4{,}5)$



Propriété :

Soit (O,I,J) un repère quelconque du plan. Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points,
Le milieu L du segment $[AB]$ a pour coordonnées $L\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$

Remarques :

- L'abscisse du milieu est la ***moyenne*** des abscisses et l'ordonnée du milieu est la ***moyenne*** des ordonnées.
- On utilise fréquemment le terme de ***demi-somme*** pour nommer la formule donnant les coordonnées du milieu d'en segment.

Exercice :

Dans un repère (O,I,J) , on donne : $A(3;7)$; $B(-2;5)$; $C(1;3)$ et $D(6;5)$
Prouver que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

Solution :

On rappelle qu'un parallélogramme est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu…

Soit H le milieu de $[AC]$, alors $H\left(\frac{x_A+x_C}{2};\frac{y_A+y_C}{2}\right)$ soit alors $H(2;5)$

Soit M le milieu de $[BD]$, alors $M\left(\frac{x_D+x_B}{2};\frac{y_D+y_B}{2}\right)$ soit alors $M(2;5)$

Puisque les diagonales se coupent en leur milieu, $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice :

Dans un repère (O,I,J) , on donne : $A(5;2)$; $B(-2;5)$; $C(1;3)$
Déterminer les coordonnées du point D afin que $ABCD$ est un parallélogramme.

Solution :

Puisque $ABCD$ est un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu, appelé L.

L est le milieu de $[AC]$, alors $L\left(\frac{x_A+x_C}{2};\frac{y_A+y_C}{2}\right)$ soit donc $L\left(3;\frac{5}{2}\right)$

L est aussi le milieu de $[BD]$, alors $L\left(\frac{x_D+x_B}{2};\frac{y_D+y_B}{2}\right)$ soit donc $L\left(\frac{x_D-2}{2};\frac{y_D+5}{2}\right)$

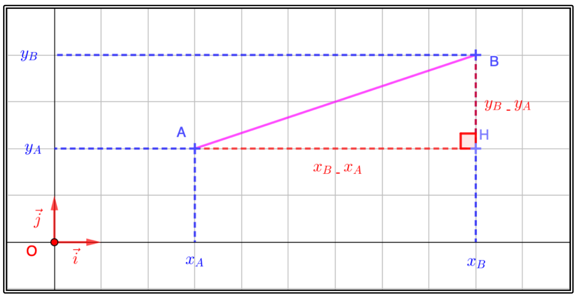
Par unicité des coordonnées, on a : $\begin{cases}\frac{x_D-2}{2}=3\\ \frac{y_D+5}{2}=\frac{5}{2}\end{cases}$ soit en multipliant $\begin{cases}x_D-2=6\\ y_D+5=5\end{cases}$ et $D(8;0)$

4) *Distance entre deux points*

Attention **:** Cette formule ne s'applique que si on est dans un repère orthonormé.

Propriété :

Soit (O, I, J) un repère orthonormé du plan
Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan, alors le segment $[AB]$ a pour longueur : $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$



Démonstration :

Il suffit d'appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle ABM

Exercice :

Soit (O, I, J) un repère du plan. On donne trois points $A(3; 2)$, $B(2; 6)$, et $C(11; 4)$.
Montrer que le triangle ABC est rectangle.

Solution :

On calcule les trois longueurs :

- $AB = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$
- $AC = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{68}$
- $BC = \sqrt{9^2 + 2^2} = \sqrt{85}$

A l'aide de la réciproque du théorème de Pythagore, on peut affirmer que le triangle ABC est rectangle en A.

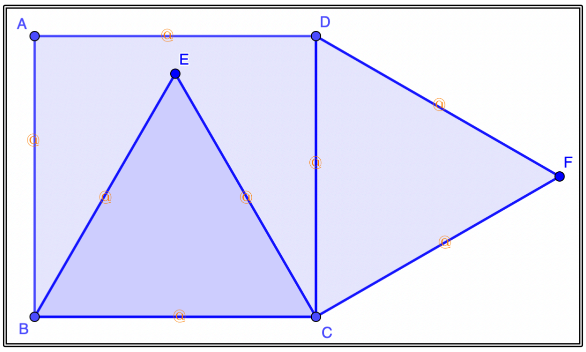
5) *Exercices types*

Le premier exercice est un grand classique de seconde. Il peut être résolu par plusieurs méthodes (coordonnées, angles, alignement de points et équations de droites).
La résolution proposée ici est la plus difficile.

Exercice 1 :

Soit la configuration ci-contre. On veut montrer que les points A, E et F sont alignés.

Soit un triangle équilatéral de côté a. Montrer que la hauteur du triangle mesure $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.
On choisit le repère orthonormé (B, C, A).



1. Donner alors les coordonnées des points A, B, C et D dans ce repère
2. Expliquer pourquoi les coordonnées des points E et F sont :
3. Calculer les longueurs AE, AF et EF puis conclure.

Solution :

1. On lit dans le repère les coordonnées suivantes : $B(0; 0)$ $C(1; 0)$ $A(0; 1)$ $D(1; 1)$
2. On nomme H le projeté orthogonal de E sur $[CB]$Dans le triangle BEH, on utilise le théorème de Pythagore. On obtient que la longueur $EH = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Donc $E\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

   Par symétrie, on nomme J le milieu de $[CD]$ et on obtient $JF = \frac{\sqrt{3}}{2}$ soit $F\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$

3. On calcule les trois longueurs demandées avec la formule : $AE = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)^2}$

Soit alors en développant $AE = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$

De la même manière, $AF = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ et aussi $EF = \sqrt{2}$

Pour prouver que les points sont alignés, on utilise l'inégalité triangulaire (cours de $5^{\text{ème}}$…) .

Il faut montrer que $AE + EF = AF$

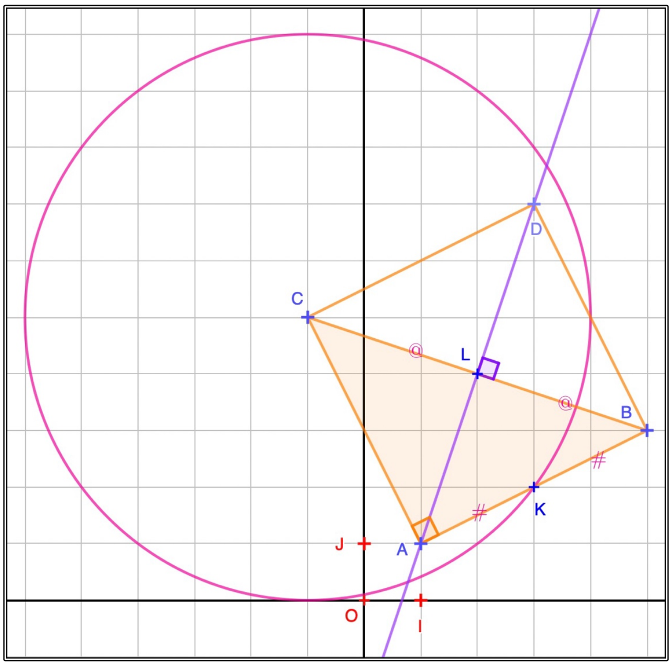
Les expressions sont compliquées à utiliser. On peut le vérifier à la calculatrice ou utiliser des techniques difficiles.

On pourrait montrer par exemple que $AE = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$ et que $AF = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$. L'égalité est alors vérifiée simplement et les trois points sont alignés.

Exercice 2 :

Placer dans un repère orthonormé les points $A(1;1)$, $B(5;3)$ et $C(-1;5)$.

a) A est-il sur la médiatrice de $[BC]$?
b) Quelle est la nature du triangle ABC ?
c) Quelles doivent être les coordonnées de D pour que $ABDC$ soit un carré ?
d) Montrer que K, le milieu de $[AB]$, est sur le cercle de centre C et de rayon 5.



Solution :

a) On calcule les deux longueurs à l'aide de la formule :
$CA = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ et $AB = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ Donc A est sur la médiatrice de $[BC]$

b) On calcule la troisième longueur : $CB = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$. A l'aide de la réciproque du Théorème de Pythagore, on peut conclure que le triangle ABC est rectangle isocèle en A.

c) Plusieurs méthodes sont possibles mais nous cherchons un point qui forme un parallélogramme (qui deviendra un losange puis un carré cours de $5^{\text{ème}}$). Soit L le milieu de $[BC]$ alors, $L\left(\frac{x_B+x_C}{2};\frac{y_B+y_C}{2}\right)$;donc $L(2;4)$. Puisqu'on cherche à déterminer les coordonnées de D afin que $ABDC$ soit un parallélogramme, L doit être le milieu de $[DA]$ donc $L\left(\frac{x_D+x_A}{2};\frac{y_D+y_A}{2}\right)$. On résout donc un système linéaire de deux équations à deux inconnues simples $\begin{cases} 2 = \frac{x_D+1}{2} \\ 4 = \frac{y_D+1}{2} \end{cases}$ soit alors $L(3;7)$

d) On détermine les coordonnées de K avec la formule de la demi-somme $K(3;2)$, puis on calcule $CK = \sqrt{4^2 + 3^2}$.Donc K est sur le cercle de centre C et de rayon 5.