Application au produit scalaire

Compétences attendues en fin de chapitre :

- Déterminer une équation cartésienne connaissant un point et un vecteur normal.
- Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite.
- Utiliser un repère pour étudier une configuration.

Le mathématicien du chapitre :

René Descartes (1596-1650) est un mathématicien, physicien et philosophe français. On lui doit, en tant que philosophe le célèbre : « je pense donc je suis ».
Il contribue à une évolution majeure des mathématiques en créant la géométrie analytique qui permet de résoudre des problèmes géométriques en utilisant des coordonnées et des méthodes algébriques.

1) Rappel sur la colinéarité

Définition :

Dire que les vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut à dire qu'il existe un nombre réel k non nul tel que : $\vec{v} = k\vec{u}$

Remarque :

Le vecteur nul est colinéaire à tout autre vecteur du plan.

Exemple :

Parmi les vecteurs suivants, quels sont les couples de vecteurs colinéaires ?
$\vec{u}(3;5)$; $\vec{v}(12;-15)$; $\vec{w}(-6;-10)$; $\vec{t}(-4;5)$; $\vec{l}(-4{,}5;7{,}5)$

Solution :

$\vec{w} = -2\,\vec{u}$ puis $\vec{v} = -3\,\vec{t}$ Les calculs sont faciles lorsque les nombres sont petits mais comment faire lorsque les valeurs augmentent ?

Propriété :
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
Les points distincts A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Remarque :

La colinéarité est une autre manière de prouver l'alignement de points dans un repère.

Propriété : Condition de colinéarité de deux vecteurs

Les vecteurs $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$
Le nombre $xy' - x'y$ est le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Notation :

On écrit :$det(\vec{u}\,,\vec{v}\,) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$

Exemple :

On donne les vecteurs $\vec{u}(5;4)$; $\vec{v}(9{,}5;7{,}5)$; Étudier leur colinéarité.
$\begin{vmatrix} 5 & 9{,}5 \\ 4 & 7{,}5 \end{vmatrix} = 5 \times 7{,}5 - 9{,}5 \times 4.$ On a donc $det(\vec{u}\,,\vec{v}\,) = -0{,}5$. Vecteurs non colinéaires.

Algorithmique :

Écrire un programme en langage Python qui teste la colinéarité de deux vecteurs.

Algorithme

Déclaration des variables

X, Y, S, T, c : réels

Traitement

Lire X, Y, S, T
Affecter à c la valeur $X \times T - Y \times S$
Si $c = 0$ alors
  Afficher (« Les vecteurs sont colinéaires. »)
Sinon
  Afficher (« Les vecteurs non colinéaires. »)
Fin si

Programme Python

```python
from fractions import Fraction

def colineaires(x_u,y_u,x_v,y_v):
    c=x_u*y_v-x_v*y_u
    if c==0:
        resultat = "les vecteurs sont colinéaires"
    else:
        resultat = "les vecteurs ne sont pas colinéaires"
    return resultat
```

Exercice :

1. Les vecteurs $\vec{u}\left(\frac{1}{3};\frac{-1}{2}\right)$ et $\vec{v}\left(\frac{2}{5};\frac{-3}{5}\right)$ sont-ils colinéaires ? $\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{5} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-3}{5} \end{vmatrix} = 0$; Oui

2. Les vecteurs $\vec{u}\left(\frac{-2}{15};\frac{2}{5}\right)$ et $\vec{v}\left(\frac{-4}{3};5\right)$ sont-ils colinéaires ? $\begin{vmatrix} \frac{-2}{15} & \frac{-4}{3} \\ \frac{2}{5} & 5 \end{vmatrix} = \frac{-2}{15}$; Non

2) *Équation cartésienne d'une droite*

a) *Vecteur directeur d'une droite*

Définition :
Soit une droite (d) et A et B deux pointes distincts de cette droite.
On appelle vecteur directeur de la droite (d) tout vecteur $\vec{u}$ non nul, colinéaire à $\overrightarrow{AB}$

Remarques :

- Un vecteur directeur d'une droite a donc par définition même direction que cette droite
- Pour chaque droite, il existe donc une infinité de vecteur directeur.
- En particulier, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur.
- On choisit souvent comme vecteur directeur le vecteur avec des coordonnées entières les plus petites.

Exemple :

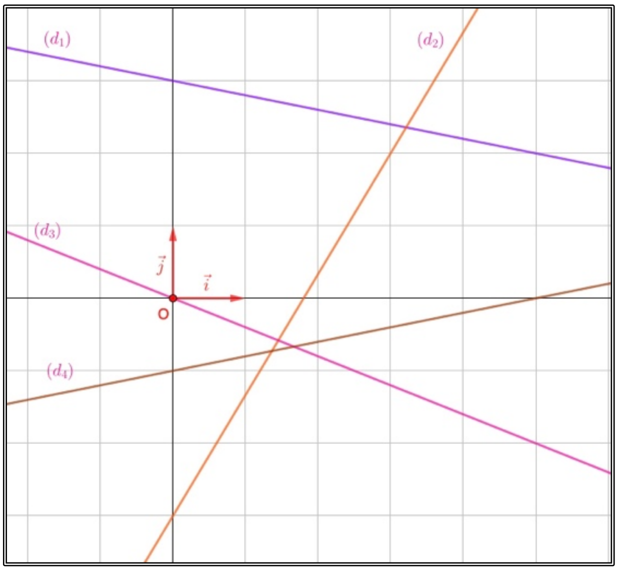
Lire sur le graphique ci-contre un vecteur directeur pour chaque droite.

(D_1) admet $\vec{u}(5;-1)$ comme vecteur directeur

(D_2) admet $\vec{u}(3;5)$ comme vecteur directeur

(D_3) admet $\vec{u}(5;-2)$ comme vecteur directeur

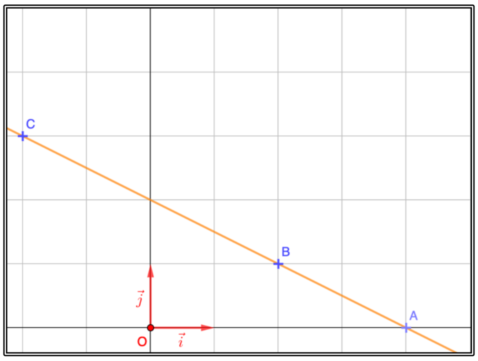
(D_4) admet $\vec{u}(5;1)$ comme vecteur directeur



b) Équation cartésienne d'une droite

Exemple introductif :

On donne les points $A(4;0)$ $B(2;1)$ $C(-2;3)$
1) Placer les points dans le repère.
2) Montrer que les points A, B et C sont alignés.
3) Soit $M(x;y)$. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$
4) En déduire une relation caractéristique des points de la droite (AB)



Solution :

1) On évalue les coordonnées des vecteurs. On a alors $\overrightarrow{AB}(-2;1)$ et $\overrightarrow{AC}(-6;3)$

On remarque que $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$. Les vecteurs sont colinéaires ; les 3 points sont donc alignés.

2) On a alors $\overrightarrow{AM}(x-4;y)$

Dire que le point M est sur la droite (AB) revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. On utilise la condition de colinéarité. $1(x-4)+2y=0$. On obtient donc une relation qui caractérise les points M : $x+2y-4=0$

Théorème :
Le plan est rapporté à un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$
(1) Toute droite (d) du plan possède une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$ avec a ou b non nul.
(2) Réciproquement, si a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, alors l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que $ax+by+c=0$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b;a)$

Remarque :

Contrairement à l'équation réduite, l'équation cartésienne d'une droite permet de caractériser toutes les droites, qu'elles soient obliques, horizontales ou verticales.

Exercice d'application :

Soit $A(-3;2)$, $B(0;1)$ et $C(2;-2)$ trois points dans un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
Déterminer une équation cartésienne :
I. De la droite (AB).
II. De la parallèle à la droite (AC) passant par B.

Solution :

I. On détermine d'abord les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}(3;-1)$ et $\overrightarrow{AM}(x+3;y-2)$.
M est sur la droite (AB) si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. On utilise la condition de colinéarité. $-(x+3)-3(y-2)=0$.
On obtient donc (AB): $x+3y-3=0$.

II. Puisque la droite est parallèle à (AC), le vecteur $\overrightarrow{AC}(5;-4)$ dirige cette droite. On a donc directement (AC): $-4x-5y+c=0$ On remplace par les coordonnées de B afin de trouver la valeur de c. On a finalement (AC): $-4x-5y+5=0$

c) Lien entre vecteur directeur et coefficient directeur

Théorème :
Le plan est rapporté à un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ Soit m un réel.
Une droite (d) du plan a pour coefficient directeur m si et seulement si le vecteur $\vec{u}(1;m)$ est un vecteur directeur de la droite (d)

Remarque :

Si la droite (d) est verticale, son équation cartésienne est de la forme (d): $x=k$. Le vecteur directeur de la droite est $\vec{u}(0;1)$ et la droite n'a pas de coefficient directeur.

Exemple :

Déterminer l'équation réduite de la droite (d) passant par $A(-3;1)$, dirigée par $\vec{u}(2;-1)$.

Solution :

Une équation réduite est de la forme : $(d): y = mx + p$ on a donc ici :$(d): y = -\frac{x}{2} + p$.

On obtient la valeur de p en remplaçant les coordonnées de A. $(d): y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

d) Lien entre équation cartésienne et équation réduite de droite

Théorème :

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ Soit m un réel.
Soit (d) une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$
1) Si $b = 0$, alors (d) est une droite parallèle à l'axe des ordonnées qui admet une équation réduite de la forme$(d): x = k$. Le vecteur $\vec{\jmath}(0;1)$ est alors directeur de (d)
2) Si $a = 0$, alors(d) est une droite non verticale qui admet $(d): y = mx + p$ comme équation réduite où m est le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine.

Exemples :

On donne la droite $(d): y = -\frac{3}{4}x + 7$. Donner une équation cartésienne de (d)

Il suffit pour cela de modifier l'écriture $(d): -\frac{3}{4}x - y + 7 = 0$ On multiplie alors pour faire disparaître la fraction $(d): 3x + 4y - 28 = 0$ on a $\vec{u}(-4;3)$ comme vecteur directeur

a) Vecteur normal et équation cartésienne d'une droite

Définition :

Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul et (d) une droite.
On dit que $\vec{n}$ est un vecteur normal à (d) si $\vec{n}$ est orthogonal à un vecteur directeur de (d).

Remarque :

Le mot orthogonal est aux vecteurs ce que le mot perpendiculaire est aux droites.

Définition :

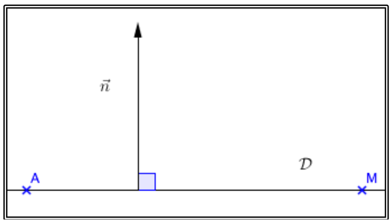
Soit un vecteur non nul $\vec{n}\binom{a}{b}$ et soit (d) une droite.
$\vec{n}$ est un vecteur normal à (d) si et seulement si (d) admet une équation cartésienne de la forme $(d): ax + by + c = 0$

Remarque :

$(d): ax + by + c = 0$ admet pour vecteur directeur $\vec{u}\binom{-b}{a}$. On a donc $\vec{n}.\vec{u} = 0$ ce qui est cohérent avec la définition.

Démonstration :

Soit $A(x_0\,;\,y_0)$ un point de la droite (d) . $\vec{n}$est un vecteur normal à (d) si et seulement si pour tout point $M(x\,;\,y)$ de (d), on a : $\vec{n}.\overrightarrow{AM} = 0$.
$\vec{n}.\overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$
$\Leftrightarrow (d): ax + by + c = 0$ avec $c = -ax_0 - by_0$



Exemple :

Soient trois points $A(7\,;8)$, $B(3\;;-2)$ et $C(5\,;1)$

1) Déterminer l'équation cartésienne de la hauteur issue de A.
2) Déterminer l'équation cartésienne de la médiatrice de $[AB]$

Solution :

1) Si la hauteur est issue de A, elle est relative au côté $[CB]$ qui est donc un vecteur normal pour cette droite $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$
Pour tout point $M(x\,;\,y)$ de (d), on a : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AM}=0$.
$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AM}=0 \Leftrightarrow 2(x-7)+3(y-8)=0$ soit (d): $2x+3y-38=0$
2) La médiatrice de $[AB]$ passe par le milieu $I(5\,;3)$; $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}4\\10\end{pmatrix}$ est un vecteur normal.
Pour tout point $M(x\,;\,y)$ de (d'), on a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM}=0$.
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM}=0 \Leftrightarrow 4(x-5)+10(y-3)=0$ soit (d'): $4x+10y-50=0$

3) *Démontrer*

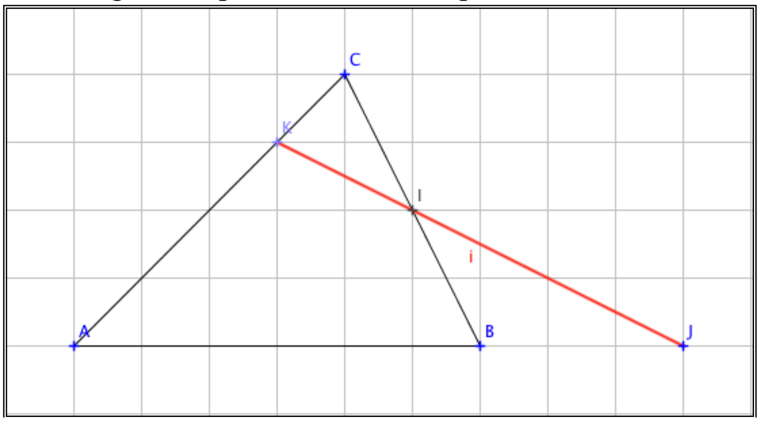
a) *L'alignement de points*

Dans un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{u}\,,\vec{v}\right)$, on donne trois points A, B et C non alignés.

1. Soit I le milieu de $[BC]$.Construire les points J et K définis par :
$\overrightarrow{AJ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AK}=3\overrightarrow{KC}$.
2. Démontrer que: $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{JK}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.
3. En déduire que les points I, J et K sont alignés.

Solution :

1) On construit une figure adaptée en tenant compte des fractions.



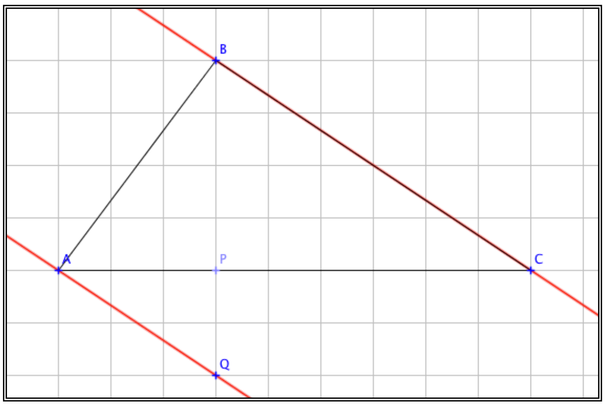
2) On utilise la relation de Chasles
$\overrightarrow{AJ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ devient $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ puisque $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ par l'identité du parallélogramme, on a : $\overrightarrow{IJ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$, on a : $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
L'égalité $\overrightarrow{AK}=3\overrightarrow{KC}$ permet d'écrire $\overrightarrow{AK}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$
On a alors $\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AK}$ soit $\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{JA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ soit alors $\overrightarrow{JK}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$
3) On remarque $\overrightarrow{JK}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{IJ}$ Les vecteurs sont colinéaires et les points alignés.

b) *Le parallélisme de deux droites*

Dans un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{u}\,,\vec{v}\right)$, on donne trois points A, B et C non alignés.

1. Construire les points P et Q définis par : $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BQ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BP}$.
2. Démontrer que les droites (BC) et (AQ)sont parallèles.

<u>Solution :</u>



A l'aide de la relation de Chasles, on exprime les vecteurs directeurs des droites

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$ puis $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PQ}$ soit alors $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{PQ}$ or $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BP}$ soit alors

$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BP}$ puis $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AP}\right)$ soit $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ soit donc $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

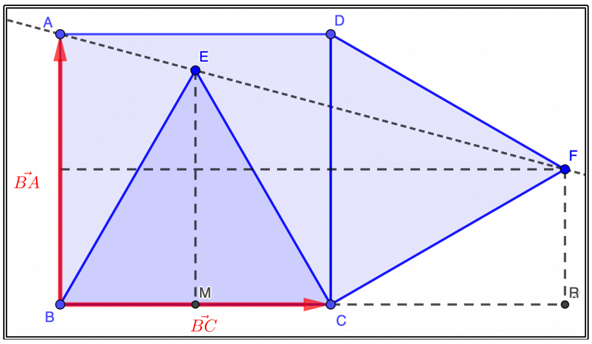
c) <u>En choisissant un repère</u>

Soit la configuration ci-contre. On veut montrer que les points A, E et F sont alignés.

Soit un triangle équilatéral de côté a. Montrer que la hauteur du triangle mesure $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

On choisit le repère orthonormal $\left(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)$.

1. Donner alors les coordonnées des points A, B, C et D dans ce repère



2. Expliquer pourquoi les coordonnées des points E et F sont : $E\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $F\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$
3. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ puis conclure.

<u>Solution :</u>

1. On lit dans le repère les coordonnées suivantes : $B(0;0)$ $C(1;0)$ $A(0;1)$ $D(1;1)$
2. On nomme H le projeté orthogonal de E sur $[CB]$Dans le triangle BEH, on utilise le théorème de Pythagore. On obtient que la longueur $EH=\frac{\sqrt{3}}{2}$ Donc $E\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

   Par symétrie, on nomme J le milieu de $[CD]$ et on obtient $JF=\frac{\sqrt{3}}{2}$ soit $F\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$
3. $\overrightarrow{AE}\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}-2}{2}\right)$ et $\overrightarrow{AF}\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2};\frac{-1}{2}\right)$

   On évalue alors $det\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF}\right)=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}+2}{2}\\ \frac{\sqrt{3}-2}{2} & \frac{-1}{2}\end{vmatrix}$

   $det\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF}\right)=\frac{-1}{4}-\frac{\sqrt{3}-2}{2}\times\frac{\sqrt{3}+2}{2}$ soit donc $det\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF}\right)=0$

   Les vecteurs sont colinéaires avec un point en commun donc les trois points sont alignés.

d) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal

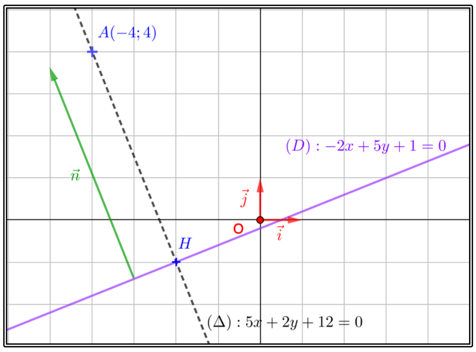
Dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ on considère le point $A(-4;4)$ et la droite (d) dont une équation cartésienne est : $(d): -2x+5y+1=0$
Calculer les coordonnées du projeté orthogonal H du point A sur la droite (d).

Remarque :

On peut placer sur un repère le point et la droite et lire les coordonnées du point d'intersection mais ce n'est pas le but ici. On doit déterminer les coordonnées par le calcul.

On exhibe un vecteur normal de la droite (d). On a : $\vec{n}\,(-2;5)$. Ce vecteur sera un vecteur directeur de la droite (Δ), passant par A et perpendiculaire à (d).

On va déterminer l'équation cartésienne de (Δ)



Pour tout point $M(x\,;\,y)$ de (Δ), on a : $det\left(\overrightarrow{AM},\vec{n}\right)=0$.
On a : $\overrightarrow{AM}\,(x+4;y-4)$ et $\vec{n}\,(-2;5)$

$\begin{vmatrix} x+4 & -2 \\ y-4 & 5 \end{vmatrix}=0$ qui devient $5(x+4)+2(y-4)=0$ soit donc $(\Delta): 5x+2y+12=0$

Le projeté orthogonal de A sur (d) est le point H, intersection des droites (Δ) et (d)

Les coordonnées de H sont donc solutions du système $\begin{cases} -2x+5y+1=0 \\ 5x+2y+12=0 \end{cases}$

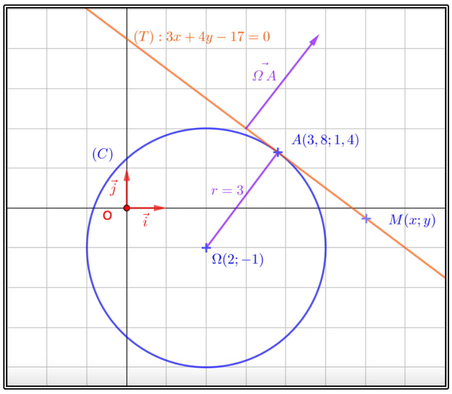
On peut résoudre ce système par combinaison linéaire.

$\begin{cases} -2x+5y+1=0 \\ 5x+2y+12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10x+25y+5=0\ (L_1 \leftarrow 5L_1) \\ 10x+4y+24=0\ (L_2 \leftarrow 2L_2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+5y+1=0 \\ 29y+29=0\ (L_2 \leftarrow L_2+L_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ et donc $H(-2;\,-1)$

e) Déterminer l'équation cartésienne d'une tangente à un cercle

Dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, on considère le cercle $(\mathcal{C})$dont une équation cartésienne est :
$x^2+y^2-4x+2y-4=0$ et le point $A(3{,}8;1{,}4)$
On souhaite déterminer l'équation de la tangente au cercle au point A.
On vérifie d'abord que le point A est bien sur le cercle.
On remplace ses coordonnées dans l'équation cartésienne du cercle : $3{,}8^2+1{,}4^2-4\times 3{,}8+2\times 1{,}4-4=0$
On détermine ensuite les coordonnées du centre du cercle en utilisant la forme canonique.



$x^2+y^2-4x+2y-4=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=9$
Les caractéristiques du cercle sont donc $I(2;-1)$ et $r=3$
On évalue les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IA}$; on obtient $\overrightarrow{IA}\,(1{,}8;2{,}4)$
Le vecteur $\overrightarrow{IA}$ est donc un vecteur normal à la tangente (T)
On a alors $(T): 1{,}8x+2{,}4y+c=0$
On obtient la valeur de c en injectant les coordonnées du point A dans l'équation.
$1{,}8\times 3{,}8+2{,}4\times 1{,}4+c=0$ soit en résolvant $c=-10{,}2$
Ainsi $(T): 1{,}8x+2{,}4y-10{,}2=0$. On multiplie l'équation par 5 afin de faire disparaitre les nombres décimaux. On obtient : $(T): 9x+12y-51=0$
Soit finalement : $(T): 3x+4y-17=0$