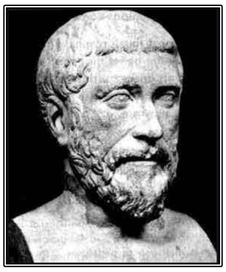
Géométrie plane

Capacités attendues en fin de chapitre :

- Résoudre des problèmes de géométrie plane sur des figures simples ou complexes (triangles, quadrilatères, cercles).
- Calculer des longueurs, des aires, des volumes.

Le mathématicien du chapitre :



Pythagore de Samos (-570 ; -497) est un mathématicien mais aussi un astronome et un philosophe grec. Il fut l'un des premiers à affirmer que la terre était ronde et gravitait autour d'un feu central. En plus de démontrer le fameux théorème, il prouva que la somme des angles d'un triangle vaut 180 degrés.
Bien plus tard, Al-Kashi (1380-1429) généralisera le théorème de Pythagore en déterminant une formule applicable, quelque soit la nature du triangle.

1) Calculs de longueurs et d'angles

a) Le théorème de Pythagore

Théorème :

Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux côtés de l'angle droit

Hypothèses	Conclusion
ABC est rectangle en A	$AB^2 + AC^2 = BC^2$
XYZ est rectangle en Z	$XZ^2 + YZ^2 = XY^2$

Exemples :

1) Soit un triangle EFG rectangle en F tel que $EF = 2{,}4$ cm et $FG = 3{,}2$ cm. Calculer EG.
2) Soit un triangle LMN rectangle en N tel que $LN = 3$ cm et $LM = 7$ cm. Calculer NM.

On sait que EFG est un triangle rectangle en F ;
D'après le théorème de Pythagore, on a :
$EG^2 = EF^2 + FG^2$
$EG^2 = 2{,}4^2 + 3{,}2^2$
$EG^2 = 16$
Donc $EG = 4$ cm

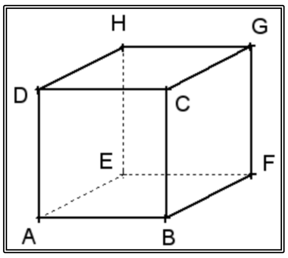
On sait que LMN est un triangle rectangle en N.
D'après le théorème de Pythagore, on a :
$LM^2 = LN^2 + NM^2$
$7^2 = 3^2 + NM^2$
$NM^2 = 40$
Donc $NM = \sqrt{40}$ cm ou $NM = 2\sqrt{10}$ cm

Remarques :

- Bien qu'on recherche un côté de l'angle droit, on écrit toujours une addition.
- Le théorème de Pythagore peut aussi être utilisé dans l'espace pour calculer des longueurs.

Exemple :

On souhaite déterminer la diagonale d'un cube d'arête 3 cm.



Dans le triangle rectangle isocèle, DHC, la diagonale du carré vaut grâce à la formule $HC = 3\sqrt{2}$
On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ECH, rectangle en H. On a : $EC^2 = EH^2 + HC^2$
$EC^2 = 9 + 18$
Soit donc $EC = \sqrt{27}$ ou $EC = 3\sqrt{3}$ cm

b) ***Le théorème de Thalès***

Théorème de Thalès :

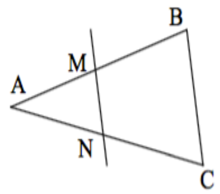
Soient deux droites (d) et (d') sécantes en A. B et M sont deux points de (d), C et N de (d').
Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors on a : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

Remarque :

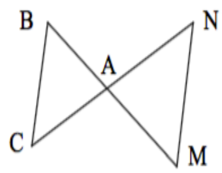
On pose d'abord la lettre qui n'est pas sur les parallèles puis on complète les rapports.

Les 2 cas de figure en « situation de Thalès » :

Configuration classique



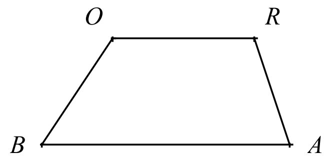
Configuration en papillon



Objectif : le Théorème de Thalès sert à calculer des longueurs sur des figures géométriques planes ou dans l'espace (agrandissement et réduction)

Exercice :

Sur la figure ci-contre, $BORA$ est un trapèze et ses diagonales se coupent en K. On sait de plus que $KB = 5$ cm ; $KR = 7{,}5$ cm ; $KA = 6$ cm et $AB = 10$cm.
Calculer les valeurs exactes de KO et OR.



Solution :

On écrit les égalités de Thalès en utilisant le point K puisque les côtés du trapèze OR et BA sont parallèles. On a alors : $\frac{KO}{KA} = \frac{KR}{KB} = \frac{OR}{AB}$ On remplace par les valeurs connues.
$\frac{KO}{6} = \frac{7{,}5}{5} = \frac{OR}{10}$. On partage alors en deux : $\frac{KO}{6} = \frac{7{,}5}{5}$ et $\frac{7{,}5}{5} = \frac{OR}{10}$
On obtient à l'aide d'un produit en croix :$KO = 9$ puis $OR = 15$

c) ***La trigonométrie***

On rappelle que la trigonométrie ne peut s'utiliser que dans un triangle rectangle. Cependant, en traçant une hauteur dans un triangle quelconque, un angle droit apparaît…

Théorème :

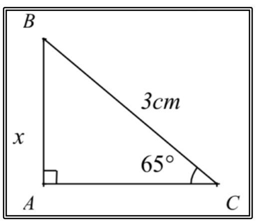
Dans un triangle rectangle, on a les formules suivantes :
$\cos(\theta) = \frac{\text{côté adjacent à } \theta}{\text{hypothénuse}}$, $\sin(\theta) = \frac{\text{côté opposé à } \theta}{\text{hypothénuse}}$ et $\tan(\theta) = \frac{\text{côté opposé à } \theta}{\text{côté adjacent à } \theta}$
où θ représente un des deux angles aigus du triangle.

Remarques :

- La trigonométrie sert principalement à calculer des longueurs mais aussi des angles.
- Au collège, on retient souvent SOH CAH TOA pour se remémorer les formules.
- Deux questions fondamentales : qu'est-ce que j'ai, qu'est-ce que je cherche ?

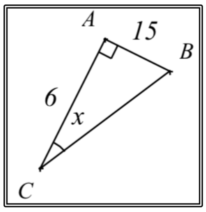
Exercices :

Déterminer la longueur x manquante.
Dans le triangle ABC, rectangle en A, j'utilise la trigonométrie. On utilise la formule du sinus, appliquée en C. $sin(\hat{C}) = \frac{AB}{BC}$. On obtient donc $sin(65) = \frac{AB}{3}$ soit $AB = 3 \times sin(65)$ donc $AB \approx 2{,}7$ cm



Déterminer la valeur de l'angle manquant.

Dans le triangle ABC, rectangle en A, j'utilise la trigonométrie. On utilise la formule de la tangente, appliquée en C. $tan(\hat{C}) = \frac{AB}{AC}$. On obtient donc $tan(x) = \frac{15}{6}$ donc $x \approx 68{,}2°$



Propriété fondamentale de la trigonométrie :

Soit x un angle aigu, on a alors : $cos^2x + sin^2x = 1$

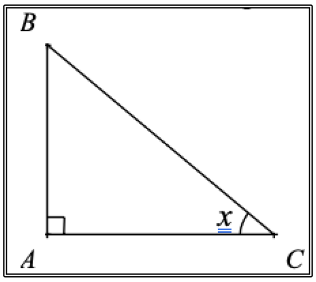
Démonstration :

On écrit les deux relations trigonométriques dans le triangle rectangle.

$cos(x) = \frac{AC}{BC}$ et $sin(x) = \frac{AB}{BC}$. On injecte ces deux relations.

$$cos^2x + sin^2x = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 = \frac{AC^2 + AB^2}{BC^2} = \frac{BC^2}{BC^2} = 1$$

On reconnait en effet le théorème de Pythagore au numérateur



Exercice :

Déterminer la valeur exacte de $cosx$ sachant que $sinx = \frac{12}{13}$

Solution :

On utilise la relation fondamentale de la trigonométrie : $cos^2x + sin^2x = 1$

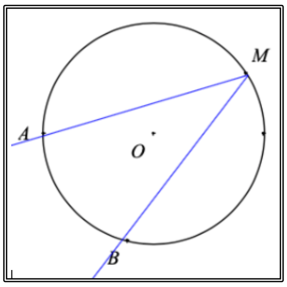
Soit en remplaçant $cos^2x + \frac{144}{169} = 1$. On a donc $cos^2x = \frac{25}{169}$

Il y a donc deux réponses possibles : $cosx = \frac{5}{13}$ ou $cosx = \frac{-5}{13}$

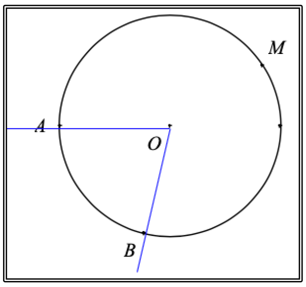
Au final $cosx = \frac{5}{13}$ car c'est un nombre positif.

d) Angles et cercle

- ***Vocabulaire***



Un angle dont le sommet est sur un cercle et dont les côtés coupent le cercle est appelé un ***angle inscrit*** dans un cercle.



Un angle dont le sommet est le centre d'un cercle et dont les côtés coupent le cercle est appelé ***angle au centre.***

- ***Théorème de l'angle au centre***

Théorème de l'angle inscrit :

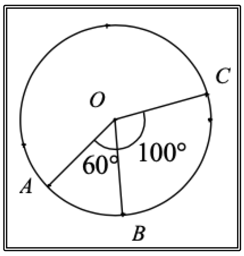
Si dans un cercle, un angle au centre et un angle inscrit interceptent le même arc, alors la mesure de l'angle au centre est le double de celle de l'angle inscrit.

Remarques :

- Tous les angles inscrits qui interceptent le même arc ont tous la même mesure.
- On retrouve la propriété de 4ème sur le triangle rectangle dans un cercle.
- $[AB]$ s'appelle une corde, $\widehat{AB}$s'appelle un arc

Exercice :

Calculer les trois angles du triangle ABC ci-contre.



Solution :

$\widehat{AOB}$ est un angle au centre, $\widehat{ACB}$ est un angle inscrit. Ces deux angles interceptent le même arc. On a donc : $\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$ soit $\widehat{ACB} = 30°$

$\widehat{COB}$ est un angle au centre, $\widehat{CAB}$ est un angle inscrit. Ces deux angles interceptent le même arc. On a donc : $\widehat{CAB} = \frac{1}{2}\widehat{COB}$ soit $\widehat{CAB} = 50°$

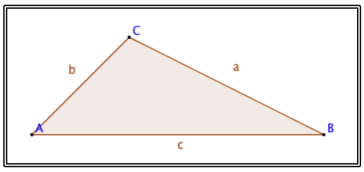
Pour déterminer le dernier angle, on utilise la somme des angles d'un triangle. On obtient donc aisément : $\widehat{ABC} = 180 - \widehat{ACB} - \widehat{CAB}$ soit $\widehat{ABC} = 100°$

e) Théorème d'Al-Kashi

Théorème :

Soient ABC un triangle quelconque.
$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \times c \times cos(\hat{A})$

Remarques :



- On peut obtenir sans problème la même égalité pour b ou c en procédant à une permutation circulaire sur les lettres a, b et c.
- Ce théorème porte souvent le nom de théorème de Pythagore généralisé. Si l'angle est droit, le cosinus est nul et on retrouve l'égalité de quatrième.

Exemples :

1) Soit ABC un triangle tel que $AB = 2$, $AC = 4$ et $\widehat{BAC} = 135°$. Déterminer CB
2) Soit EFG un triangle tel que $EF = 2$, $FG = 7$ et $EG = 6$. Déterminer $\widehat{EGF}$

Solution :

On écrit la formule d'Al-Kashi en cherchant soit une longueur, soit un angle :

1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2b \times c \times cos(\hat{A})$ devient :
   $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times cos(\widehat{BAC})$
   $BC^2 = 4 + 16 + 4 \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$ soit donc $BC = \sqrt{20 + 8\sqrt{2}}$
2) $g^2 = e^2 + f^2 - 2e \times f \times cos(\hat{G})$ devient :
   $EF^2 = FG^2 + EG^2 - 2FG \times EG \times cos(\widehat{EGF})$
   $4 = 36 + 49 - 12 \times 7 \times cos(\widehat{EGF})$ soit $cos(\widehat{EGF}) = \frac{81}{84}$ soit $\widehat{EGF} \approx 15{,}36°$

2) Droites remarquables du triangle

a) Médiatrices d'un triangle

Définition :

La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu.

Remarque :

On construit la médiatrice à l'aide d'un compas et non pas d'une équerre.

Propriété :

La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points du plan équidistants des extrémités du segment
Les 3 médiatrices d'un triangle sont concourantes en un point O appelé centre du cercle circonscrit

Remarque :

- Lorsque le triangle est rectangle, le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.
- Lorsque le triangle possède un angle obtus, le centre du cercle circonscrit est à l'extérieur du triangle.

b) Hauteurs d'un triangle

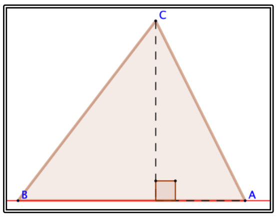
Définition :

Une hauteur est une demi-droite issue d'un sommet du triangle et perpendiculaire au côté opposé.

Vocabulaire :

On peut exprimer la même hauteur de deux manières différentes :

- La hauteur issue de C
- La hauteur relative au côté $[AB]$



Propriété :

Les 3 hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point H appelé orthocentre du triangle.

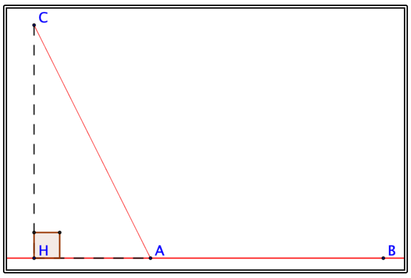
3) Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Définition :

Soient A, B et C trois points (A et B distincts). On appelle projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) le point H d'intersection entre (AB)et la perpendiculaire à (AB)passant par C.

Illustration :

Le projeté orthogonal ne se trouve pas nécessairement entre les points A et B. Il peut même se trouver confondu avec l'un deux.
Si on trace le triangle ABC, on retrouve la notion de hauteur issue de C vue précédemment.



Propriété :

La distance du point C à la droite (AB) est la plus petite distance séparant un point de (AB) avec C. Elle est égale à la distance CH ou H est le projeté orthogonal de C sur (AB).

4) Tangente à un cercle

Définition :

La tangente à un cercle $\mathcal{C}$ de centre O en un point M est la droite passant par M et perpendiculaire au rayon $[OM]$

Remarque :

- La tangente coupe le cercle en un seul point : M.
- Le rayon du cercle est la distance de O à la tangente en M.
- $[OM]$ est perpendiculaire à la tangente en M.