Généralités sur les fonctions

Capacités attendues en fin de chapitre :

- Exploiter l'équation $y = f(x)$ d'une courbe ; calcul de coordonnées.
- Modéliser par des fonctions des situations issues des mathématiques.
- Résoudre une équation $f(x) = k$ ou une inéquation $f(x) < k$ en choisissant une méthode adaptée : graphique, algébrique, logicielle.
- Résoudre une équation $f(x) = g(x)$ ou une inéquation $f(x) < g(x)$ en choisissant une méthode adaptée : graphique, algébrique.

Le mathématicien du chapitre :

Au 17$^{\text{ème}}$ siècle, grâce à l'émergence de la géométrie analytique, l'étude des courbes rejoint ce que nous appelons aujourd'hui l'étude des fonctions. Gottfried Leibniz, est le premier en 1673 à utiliser le terme de fonction. Il désigne par ce terme des grandeurs géométriques dépendant d'autres grandeurs géométriques. Cependant, l'idée de relation entre les quantités prend naissance chez les babyloniens.

1) Activités de découverte

a) Algorithme de calcul

On donne le programme de calcul ci-contre:

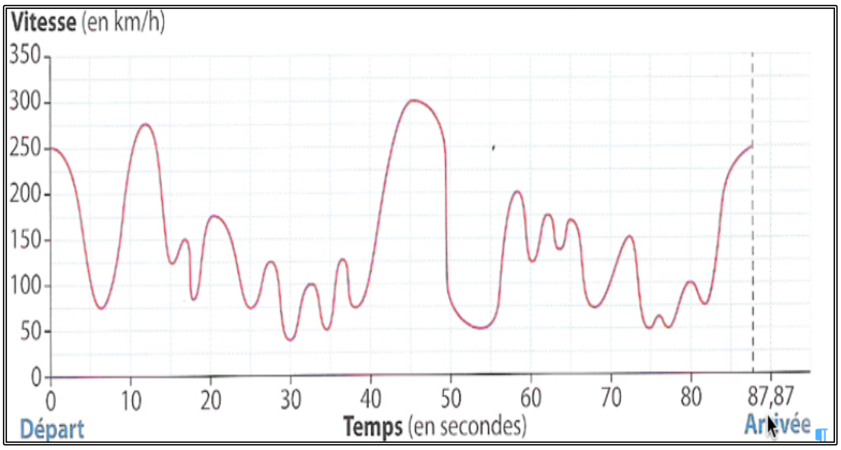
Choisir un nombre :
a) Multiplier ce nombre par 3.
b) Ajouter le carré du nombre choisi.
c) Multiplier par 2.
d) Écrire le résultat.

1) Donner le calcul et le résultat si le nombre choisi au départ est 10.
On a le calcul :$(10 \times 3 + 10^2) \times 2 = 260$

2) Donner l'expression littérale du résultat si le nombre choisi est x.
On a l'expression $f(x) = (3x + x^2) \times 2$

b) Comprendre un graphique.

Voici l'enregistrement de la vitesse à chaque instant d'une monoplace lors du grand prix de Monaco sur un tour complet de circuit.



1.a Lors de son passage sur la ligne de départ, la voiture était-elle arrêtée ou lancée ? Pourquoi ?
Elle était lancée car la vitesse initiale est d'environ 250 km/h.
b. Compléter :
Ce graphique représente les variations de la vitesse de la voiture en fonction du temps
c. Quelle est la variable ? C'est le temps. Quelle est la grandeur ? C'est la vitesse de la voiture.
2. Lire (le plus précisément possible) :

a. La vitesse de la voiture au bout de : 5s 125 km/h. 20s 175 km/h 40s : 125 km/h 55s : 50 km/h
b. Les instants auxquels la voiture a roulé à : 300km /h :45 s 250km/h 6 valeurs 25km/h : jamais
3. Combien de temps la voiture a-t-elle mis pour parcourir un tour ?1 minutes et 27secondes 87 centièmes
4. Pour les spécialistes, combien de temps faut-il au pilote pour atteindre l'entrée du tunnel ?
Il entre dans le tunnel 40 secondes après le début du tour.

2) Notations, définitions et vocabulaire.

Définition :

Soit *D* une partie de l'ensemble des réels.
Définir une fonction *f* sur *D*, c'est associer à chaque réel *x* de *D*, un réel et un seul $f(x)$, appelé image.
D est appelé l'ensemble de définition de la fonction *f*, c'est-à-dire l'ensemble des réels *x* tels que $f(x)$ existe.
D est souvent noté D_f

Vocabulaire :

Le nombre *x* est appelé antécédent.

Notation :
On peut le schématiser ainsi : $x \longmapsto y$ et on écrira $y = f(x)$ puisque y est déterminé en fonction de la valeur de *x*.

Remarques :

- Dans le cadre d'un problème, *x* est appelée la variable et *y* est la grandeur étudiée.
- Par une fonction, un nombre ne peut avoir qu'une seule image.
- Cependant une image peut avoir plusieurs antécédents.
- On utilise souvent la lettre *f* pour nommer une fonction mais on peut en utiliser d'autres.

Exemple : On sait que $f(2) = -4$

Alors on dit que - 4 est l'image de 2 par la fonction *f*. Ou que 2 est l'antécédent de – 4 par *f*.

Remarque :

De nombreux élèves confondent image et antécédent. Pourtant, il existe un moyen simple de le retenir ; Tous les mots sont rangés dans l'ordre alphabétique.

De plus, on dit souvent que l'antécédent est dedans !

Antécédent	Image
x	*y*
Horizontale	Verticale
Abscisse	Ordonnée

Exercice 1 : Soit la fonction $f(x) = 5x - 8$
Calculer l'image de 7 par *f*

Méthode :

Pour calculer l'image d'un nombre par une fonction, il suffit de remplacer la lettre par le nombre.
Dès que *x* disparaît dans les parenthèses, il doit disparaître dans l'expression.
On obtient ici $f(7) = 27$
Calculer de la même manière $f(-3)$. On obtient alors $f(-3) = -23$

Exercice 2 :

Soit la fonction $g(x) = x^2 - 10x + 7$
Calculer l'image de 2 par *g* ainsi que l'image de 8
On a par un rapide calcul mental : $g(2) = -9$ et $g(8) = -9$
Ce qui confirme qu'une image peut avoir deux antécédents.

3) Représentation à l'aide d'un tableau

Pour simplifier l'écriture des résultats, on utilise souvent un tableau pour regrouper toutes les réponses :
On le représente comme suit : $f(x) = x^2 + 3x - 1$

Nombre x	0	–3	1	–2
Image $f(x)$	-1	-1	3	-3

Soit la fonction $f(x) = x^2 + 3x - 1$
Calculer alors les images des nombres ci-contre.

4) Représentation graphique d'une fonction

Définition : Soit f est une fonction définie sur D. Dans un repère, la courbe représentative (C) de la fonction f, est l'ensemble des points M de coordonnées. $(x; f(x))$

Remarque :

- Attention, le tracé n'est pas obligatoirement une droite. C'est en général une courbe.
- Dire qu'un point de coordonnées $(a; b)$ appartient à (C) revient à dire que $f(a) = b$

Exercice :

La courbe représentative (C) d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ a pour équation : $y = x^2 - 2x + 3$
M est le point de C d'abscisse –2.
Quelle est son ordonnée ? On calcule son image en remplaçant x par -2. On obtient 11

5) Fonctions paires, fonctions impaires

a) Fonctions paires

Définition :

Soit une fonction f définie sur un ensemble D_f symétrique par rapport à l'origine, on dit que f est paire si pour tout $x \in D_f$: $f(-x) = f(x)$
La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

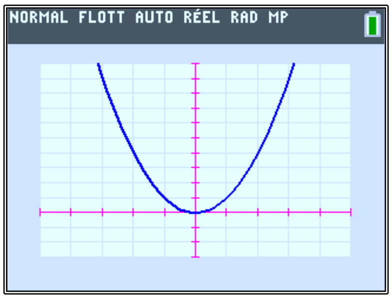
Attention :

De nombreux élèves négligent le domaine. Dire qu'une fonction est paire sur $[-3; 5]$ n'a aucun sens mathématique puisque le domaine n'est pas symétrique par rapport à l'origine.

Exemples :

Toutes les fonctions polynômes ne contenant que des monômes de degré paires sont paires
Par exemple, $f(x) = 5x^2 + 3$ est une fonction paire.

La fonction $f: x \mapsto x^2$ est une fonction paire. Sa représentation graphique admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie



Remarque :

La fonction $f: x \mapsto 3x^2 - 5x + 2$ n'est pas une fonction paire bien que sa représentation graphique soit une parabole.

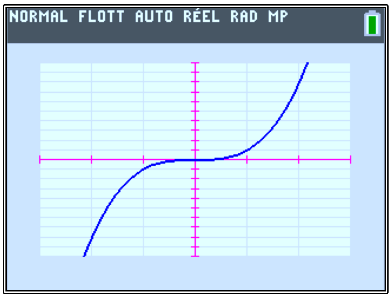
b) Fonctions impaires

Définition :

Soit une fonction f définie sur un ensemble D_f symétrique par rapport à l'origine, on dit que f est impaire si pour tout $x \in D_f$: $f(-x) = -f(x)$
La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Exemple :

La fonction $f : x \mapsto x^3$ est une fonction impaire.
Sa représentation graphique admet l'origine du repère comme centre de symétrie (courbe ci-contre)



Remarque :

La fonction $f : x \mapsto x^3 - 5x$ est une fonction impaire.

Attention :

Il y a des courbes qui possèdent des axes de symétries ou des centres de symétrie mais les fonctions qu'elles représentent ne sont ni paires ni impaires.
Il y a d'ailleurs bien plus de fonctions ni paires ni impaires que des fonctions paires ou impaires.

6) Lectures graphiques

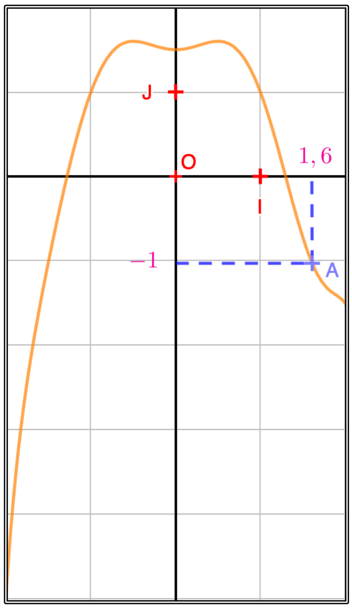
a) Recherche d'image

f est une fonction définie sur *D*, (*C*) est la représentation graphique de *f*, *a* est un élément de *D*.
Si *A* est le point de *C* d'abscisse *a*, alors $f(a)$ est l'ordonnée de *A*.

Exercice :

La courbe (*C*) ci-contre est la représentation graphique d'une fonction *f* définie sur $[-2; 2]$.
Pour lire graphiquement l'image de 1,6 c'est à dire l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 1,6, on peut procéder ainsi :

- On repère 1,6 sur l'axe des abscisses et on trace, par ce point, la parallèle à l'axe des ordonnées ;
- Cette droite rencontre (*C*) en *A* ;
- On cherche ensuite l'ordonnée de *A* en traçant par ce point la parallèle à l'axe des abscisses. Avec la courbe ci-contre, on obtient ici -1 comme ordonnée.



b) Recherche d'antécédents

f est une fonction définie sur *D*, (*C*) est la représentation graphique de *f*, *b* est un réel.
d est la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par le point de cordonnées $(0; b)$.

1^er^ cas :

d ne rencontre pas (*C*) : cela signifie que *b* n'a pas d'antécédent par *f* dans *D* (ou aucun élément de *D* n'a *b* pour image par *f*)
Quel est l'antécédent de 2 ? il n'y en a pas.

2^ème^ cas :

d rencontre *C* en $A(a; b)$. Alors *A* est sur (*C*) donc $f(a) = b$ et *a* est un antécédent de *b* par *f*.
Quel est l'antécédent de -5 par *f* ? On lit sur le graphique -2 donc $f(-2) = -5$

Remarque :

La lecture graphique ne donne en général qu'une valeur approchée du résultat cherché.

7) Résolution graphique d'équations et d'inéquations

f est une fonction définie sur un intervalle *I*. (*C*) est la représentation graphique de *f*

a) Équation $f(x) = k$; Inéquation $f(x) < k$

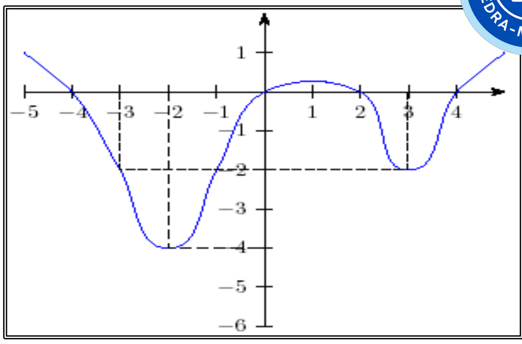
Soit *k* un réel donné. Pour résoudre graphiquement l'équation $f(x) = k$ (ou l'inéquation $f(x) < k$), on trace la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par le point de coordonnées $(0; k)$. On a alors :

Pour l'équation $f(x) = -2$ (d'inconnue x):

• La courbe (C) coupe la droite horizontale $y = -2$ en trois points. On relève sur l'axe des abscisses ces valeurs. On note alors : $S = \{-3; -1; 3\}$

Pour l'inéquation $f(x) < -2$ (d'inconnue x) :

• La courbe (C) se trouve sous la droite d'équation $y = -2$ On relève sur l'axe des abscisses le ou les intervalles qui correspondent à cela. $S =]-3; -1[$



Attention :

Puisque l'inégalité est stricte, la valeur en 3 n'est pas admise.

Cas particulier :

Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.

b) ***Équation $f(x) = g(x)$ et inéquation $f(x) \leq g(x)$***

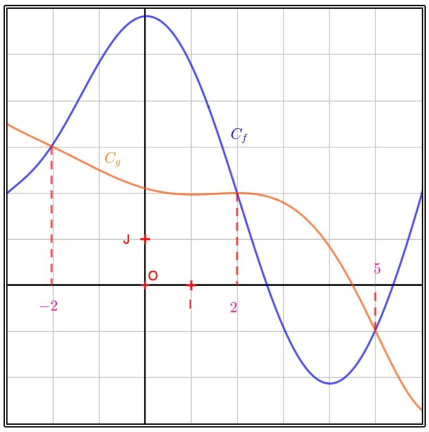
f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I. C_f et C_g sont les courbes représentatives de f et g.

• Pour l'équation $f(x) = g(x)$. Les courbes C_f et C_g se coupent en trois points. Les abscisses de ces points sont les solutions de l'équation.

Donc, ici, $S = \{-2; 2; 5\}$

• Pour l'inéquation $g(x) \leq f(x)$. Nous recherchons les abscisses des points pour lesquels la courbe C_f se situe au-dessus de la courbe C_g.

Donc, ici, $S = [-2; 2] \cup [5; 6]$

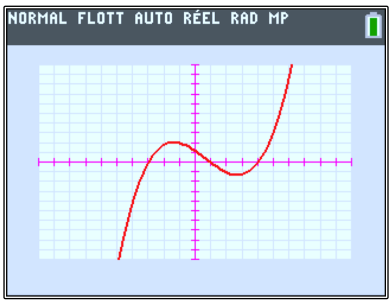


c) ***Tableau de signe d'une fonction***

On donne la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. On souhaite déterminer le signe de f sur $\mathbb{R}$. Ceci se traduit finalement par résoudre les inéquations $f(x) \leq 0$ et $f(x) \geq 0$

On observe alors les points d'intersection avec l'axe des abscisses. Dans l'exemple ci-contre, ces points sont des entiers mais ce n'est pas obligatoire.

Pour donner le signe, on construit alors un tableau de signe résumant la situation en indiquant l'ensemble des informations.



x	$-\infty$		-3		1		4		$+\infty$
f		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Attention :

Ne pas confondre signe d'une fonction et variation d'une fonction.