Fonctions de référence

Capacités attendues en fin de chapitre :

- Fonctions carré, inverse, racine carrée et cubique.
- Position relative des courbes des fonctions ci-dessus pour $x > 0$.
- Variations des fonctions carré, inverse, racine carrée et cubique.

Le mathématicien du chapitre :

Archimède de Syracuse (287 avant JC – 212 avant JC) fut un grand scientifique de l'époque ancienne, mathématicien, physicien et ingénieur. Il est considéré comme le plus grand mathématicien de l'antiquité. Il calcula notamment l'aire sous l'arc d'une parabole à l'aide de sommes infinies. Il fut tué par un soldat romain lors du siège de Syracuse malgré les ordres demandant de ne pas lui nuire.

1) La fonction carrée

a) Définition

Définition :

La fonction carrée est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$

Remarque :

Puisque $f(1) = 1$ et $f(2) = 4$, il n'y a pas de proportionnalité. La fonction carrée n'est donc pas linéaire et sa représentation graphique n'est pas une droite qui passe par l'origine.

b) Sens de variation

On étudie tout d'abord les variations sur $[0\,;+\infty[$
Soient $0 < a < b$, on évalue la différence des images.
$f(b) - f(a) = b^2 - a^2$
On factorise l'expression : $f(b) - f(a) = (b - a)(b + a)$
On a donc $f(b) - f(a) > 0$ et donc $f(b) > f(a)$
f est donc croissante sur $[0\,;+\infty[$
On montrerait de la même manière que f est décroissante sur $]-\infty; 0]$

On peut donc construire le tableau de variation de la fonction carrée sur $\mathbb{R}$

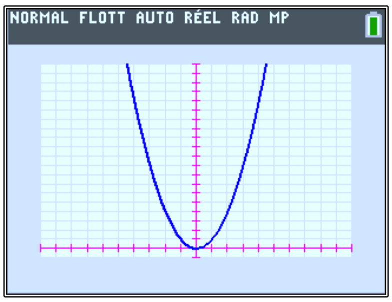
x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		↘	0	↗	

Remarque :

On ne complète pas les valeurs en l'infini même si intuitivement, on peut penser qu'un très grand nombre au carré sera aussi un très grand nombre.

c) Courbe représentative

La fonction carrée est définie sur $\mathbb{R}$.
Ainsi si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$
On évalue $f(-x) = (-x)^2$ soit $f(-x) = x^2$
La fonction est donc paire. On peut l'étudier sur $[0; +\infty[$ car la courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. On construit la courbe chez les positifs et on complète chez les négatifs.



2) *La fonction racine carrée*

a) *Définition et propriétés*

Définition : Pour tout réel positif ou nul a, il existe un unique réel positif ou nul dont le carré est égal à a. Ce réel est appelé la racine carrée de a et est noté $\sqrt{a}$

Remarque :

Si a est positif et non nul, il existe un autre nombre, strictement négatif, dont le carré est aussi égal à a. C'est $-\sqrt{a}$

Définition :

La fonctions racine carrée est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ qui, à tout réel x positif ou nul lui associe le réel $\sqrt{x}$

Propriétés algébriques :

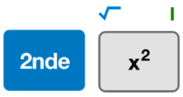
Pour tout x de $\mathbb{R}^+$, on a :

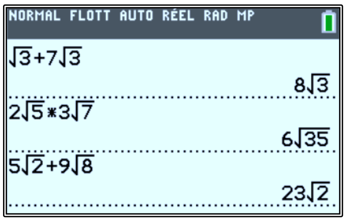
$\sqrt{x} \geq 0$ $\qquad$ $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ $\qquad$ $\sqrt{x^2} = x$

Attention :

Les deux dernières propriétés ne sont pas identiques. L'une est la racine carrée d'un carré tandis que l'autre est le carré d'une racine carrée.

Avec votre calculatrice, la *TI* 83 prémium, le calcul avec des radicaux s'effectue automatiquement. On peut ajouter ou multiplier des radicaux





b) *Sens de variation*

Théorème :

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Elle conserve l'ordre sur $\mathbb{R}^+$.

Démonstration :

Soient a et b deux réels positifs tels que $0 < a < b$: $f(b) - f(a) = \sqrt{b} - \sqrt{a}$

On utilise l'expression conjuguée, qui permet de faire disparaitre des racines carrées.

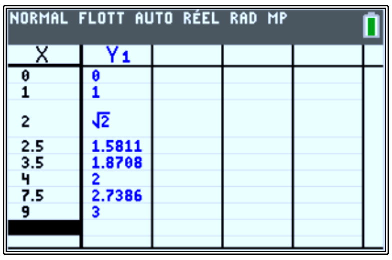
$f(b) - f(a) = \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{a})}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$ En développant et en utilisant une des propriétés ci-dessus.

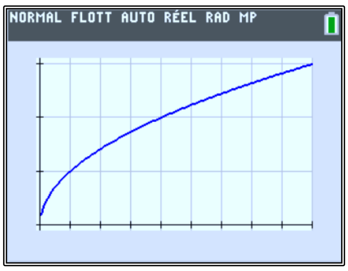
$f(b) - f(a) = \frac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$ Le dénominateur est positif, le numérateur aussi. On a donc :

$f(b) - f(a) > 0$ Soit alors $f(a) < f(b)$ Donc f est croissante sur $\mathbb{R}^+$

c) *Courbe représentative*

Afin de construire la représentation graphique de la fonction racine carrée, il faut un tableau de valeurs avec des valeurs intermédiaires entre les entiers.



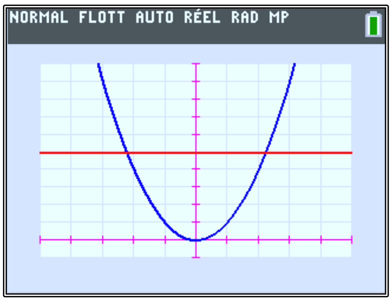


Il faut connaitre certaines valeurs comme $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ ou $\sqrt{3} \approx 1{,}732$

Cette courbe est appelée moitié de Parabole en référence à la courbe de $x \longmapsto x^2$

d) Équations et inéquations

Exemple :



On souhaite résoudre l'équation $x^2 = 5$
Comme vu au chapitre sur les fonctions, on peut déterminer graphiquement les solutions en cherchant l'intersection de la courbe et de la droite. On obtient deux valeurs approchées opposées. On a : $S = \{-2{,}2 \,; 2{,}2\}$
On peut aussi déterminer les solutions par le calcul en utilisant la 3ème identité remarquable.
On a alors : $x^2 = 5$ soit $x^2 - 5 = 0$ qui devient
$(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0$ donc $S = \{-\sqrt{5} \,; \sqrt{5}\}$. Pour votre culture, on a : $\sqrt{5} \approx 2{,}23$

Propriété :

L'équation $x^2 = k$ admet :
Deux solutions $\sqrt{k}$ et $-\sqrt{k}$ si k est un nombre positif.
Une solution nulle si k est nul.
Aucune solution si k est négatif

Propriété :

L'inéquation $x^2 < k$ admet :
$S =]-\sqrt{k} \,; \sqrt{k}[$ comme solution si k est un nombre positif.
Aucune solution si k est négatif ou nul.

L'inéquation $x^2 > k$ admet :
$S =]-\infty \,; -\sqrt{k}[\cup]\sqrt{k} \,; +\infty[$ comme solution si k est un nombre positif.
$S = \mathbb{R}^*$ comme solution si k est négatif ou nul.

Exemple :

L'inéquation $x^2 \geq 169$ admet comme solution $S =]-\infty \,; -13] \cup [13 \,; +\infty[$

3) La fonction cube

d) Définition

Définition :

La fonction cube est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$

Remarque :

Puisque $f(1) = 1$ et $f(2) = 8$, il n'y a pas de proportionnalité. La fonction cube n'est donc pas linéaire et sa représentation graphique n'est pas une droite qui passe par l'origine.

e) Sens de variation

On étudie tout d'abord les variations sur $[0 \,; +\infty[$
Soient $0 < a < b$, on évalue la différence des images : $f(b) - f(a) = b^3 - a^3$
On factorise l'expression : $f(b) - f(a) = (b - a)(b^2 + ab + a^2)$
On a donc $f(b) - f(a) > 0$ et donc $f(b) > f(a)$
f est donc croissante sur $[0 \,; +\infty[$
On montrerait de la même manière que f est croissante sur $]-\infty; 0]$

On peut donc construire le tableau de variation de la fonction cube sur $\mathbb{R}$

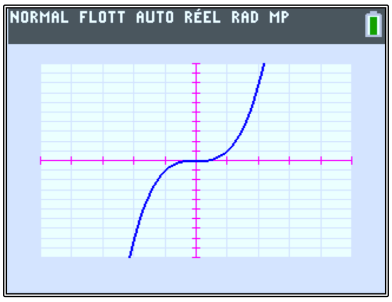
x	$-\infty$	0	$+\infty$
f		0	

Remarque :

On ne complète pas les valeurs en l'infini même si intuitivement, on peut penser qu'un très grand nombre au cube sera aussi un très grand nombre.

f) Courbe représentative

La fonction cube est définie sur ℝ.
Ainsi si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$
On évalue $f(-x) = (-x)^3$ soit $f(-x) = -x^3$
La fonction est donc impaire. On peut l'étudier sur $[0; +\infty[$ car la courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère. On construit la courbe chez les positifs et on complète chez les négatifs.



4) Positions relatives de courbes

a) Définition et exemple

Définition :

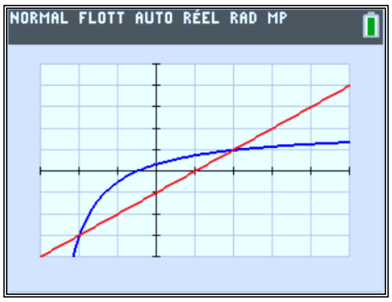
Soit *I* un intervalle de ℝ et x_0 un réel appartenant à *I*. Soient *f* et *g* deux fonctions définies sur *I*, de courbe représentative $\mathcal{C}f$ *et* $\mathcal{C}g$.
- $\mathcal{C}f$ est au-dessus de $\mathcal{C}g$ si et seulement si, pour tout *x* de *I*, $f(x) > g(x)$
- $\mathcal{C}f$ est sécante avec $\mathcal{C}g$ au point d'abscisse x_0 si et seulement si $f(x_0) = g(x_0)$
- $\mathcal{C}f$ est en-dessous de $\mathcal{C}g$ si et seulement si, pour tout *x* de *I*, $f(x) < g(x)$

Remarque :

Ça n'a aucun sens de dire que *f* est au-dessus de *g*. De même, dire que $\mathcal{C}f$ est plus grande que $\mathcal{C}g$ est faux.

Exemple :

Déterminer la position relative de la courbe $\mathcal{C}f$ et de la droite $\mathcal{C}g$ sur $[-3; 5]$.



$\mathcal{C}f$ est au-dessus de $\mathcal{C}g$ sur $]-2; 2[$

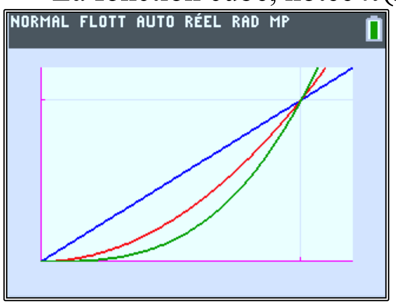
$\mathcal{C}f$ est en-dessous de $\mathcal{C}g$ sur$]-3; -2[\cup]2; 5[$

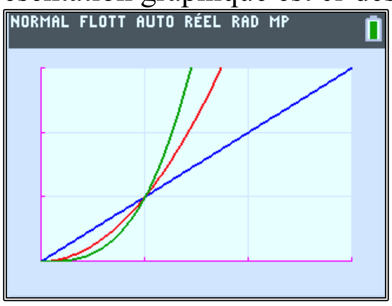
$\mathcal{C}f$ et $\mathcal{C}g$ sont sécantes aux points d'abscisses -2 et 2.

b) Les trois fonctions de références

On va étudier la position relative de trois fonctions de référence sur $[0, +\infty[$:

- La fonction carrée, notée $f(x) = x^2$ dont la représentation graphique est une moitié de Parabole sur $[0, +\infty[$:
- La fonction identité, notée $g(x) = x$ dont la représentation graphique est une droite passant par l'origine, appelée première bissectrice.
- La fonction cube, notée $h(x) = x^3$, dont la représentation graphique est ci-dessus.





Propriété :

$\forall x \in]0;1[, x^3 < x^2 < x$
$\forall x \in]1;+\infty[, x < x^2 < x^3$
Les trois courbes sont sécantes aux points d'abscisses 0 et 1.

Démonstration :

Afin d'étudier la position relative de deux courbes, on évalue la différence des deux fonctions

- On étudie le signe de $f(x) - g(x) = x^2 - x$
  On factorise l'expression $f(x) - g(x) = x(x-1)$
  Sur $]0;1[$ $x^2 - x < 0$ donc $x^2 < x$
  Sur $]1;+\infty[$ $x^2 - x > 0$ donc $x < x^2$
- On étudie maintenant le signe de $h(x) - f(x) = x^3 - x^2$. On transforme l'écriture en factorisant $h(x) - f(x) = x^2(x-1)$
  Le signe dépend donc du signe de $(x-1)$ On peut donc conclure que :
  Sur $]0;1[$ $x^3 - x^2 < 0$ donc $x^3 < x^2$
  Sur $]1;+\infty[$ $x^3 - x^2 > 0$ donc $x^3 > x^2$

5) *La fonction inverse*

a) *Définition*

Définition :

La fonction inverse est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$

Remarque :

Puisque $f(1) = 1$ et $f(2) = 0,5$, il n'y a pas de proportionnalité. La fonction inverse n'est donc pas linéaire et sa représentation graphique n'est pas une droite qui passe par l'origine.

b) *Sens de variation*

On étudie tout d'abord les variations sur $]0;+\infty[$

Soient $0 < a < b$, on évalue la différence des images :$f(b) - f(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$

On met au même dénominateur l'expression : $f(b) - f(a) = \frac{a-b}{ab}$

On a donc $f(b) - f(a) < 0$ et donc $f(b) < f(a)$
f est donc décroissante sur $]0;+\infty[$
On montrerait de la même manière que f est décroissante sur $]-\infty;0[$

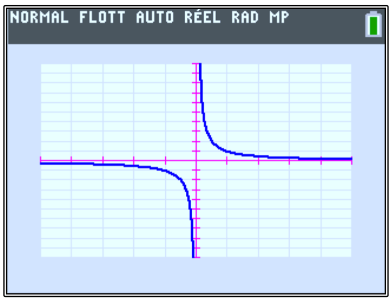
On peut donc construire le tableau de variation de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^*$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↘	‖	↘

Remarque :

On ne complète pas les valeurs en l'infini même si intuitivement, on peut penser que l'inverse d'un très grand nombre sera un tout petit nombre.

c) *Courbe représentative*



La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^*$.
Ainsi si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$
On évalue $f(-x) = \frac{1}{-x}$ soit $f(-x) = -\frac{1}{x}$
La fonction est donc impaire. On peut l'étudier sur $]0;+\infty[$ car la courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère. On construit la courbe chez les positifs et on complète chez les négatifs.