Équations cartésiennes de droites et systèmes

Capacités attendues en fin de chapitre :

- Déterminer une équation cartésienne d'une droite à partir de deux points, un point et un vecteur directeur, un point et la pente.
- Déterminer la pente ou le vecteur directeur d'une droite donnée par un équation ou une représentation graphique.
- Tracer une droite connaissant son équation cartésienne ou réduite.
- Établir l'alignement de trois points.
- Déterminer si deux droites sont parallèles ou sécantes.
- Résoudre un système de deux équations à deux inconnues.

Le mathématicien du chapitre :

Gabriel Cramer (1704 -1752) est un mathématicien suisse de l'académie de Genève. On lui doit de nombreuses contributions en algèbre et géométrie.
En 1750, il publie un traité dans lequel il développe une méthode pour résoudre les systèmes linéaires connue aujourd'hui sous le nom de règle de Cramer. Il utilise un outil qui sera appelé plus tard déterminant…

Important :

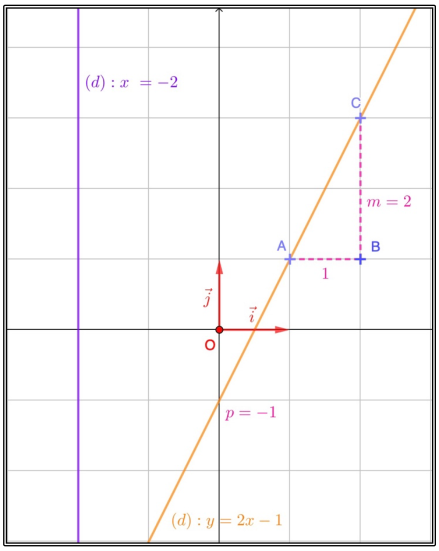
Dans ce chapitre, on va réutiliser des notions apprises au cours de l'année : Équation réduite de droite, colinéarité de vecteurs, déterminant.

1) *Équations réduites de droites*

a) *Rappel des définitions*

Théorème :

Toute droite $(\boldsymbol{AB})$ du plan admet une ***équation réduite*** de la forme :
a) Soit $\boldsymbol{x = c}$ (constante) si elle est verticale, c'est-à-dire parallèle à l'axe des ordonnées.
Réciproquement, Si A et B ont la même abscisse $x_A = x_B$, alors la droite (AB) est parallèle à l'axe des ordonnées et son équation est : $x = c$
b) Soit $\boldsymbol{y = mx + p}$ si elle n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.
Dans ce cas $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ est appelé le coefficient directeur (également nommé pente) et
$p = y_A - m x_A$ est appelé l'ordonnée à l'origine.



Remarques :

- Au collège, l'équation réduite d'une droite est nommée : $y = ax + b$ Les notations changent en seconde car les lettres a et b auront une autre signification en première.
- Le coefficient directeur est donc un rapport : « celui de l'écart des y sur l'écart des x ».

  Il vérifie : $m = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{\uparrow}{\rightarrow} = \frac{monter}{avancer}$ Il n'y a donc pas d'unité à ce nombre.

Attention :

Pour compter les carreaux, il faut impérativement avoir ***les mêmes unités*** sur les deux axes du repère.

b) Détermination de l'équation réduite d'une droite par le calcul

On donne trois points de coordonnées : $A(1;3)$, $B(-1;5)$et $C(1;-7)$
Déterminer alors les équations réduites des droites (AB), (BC) et (AC)

```
from math import *
def reduite(x_A,y_A,x_B,y_B):
  if x_A == x_B:
    print ("(AB):x = ",x_A)
  else:
    m =(y_B-y_A)/(x_B-x_A)
    p = y_A - x_A*m
    print("(AB):y=",m,"x+(",p,")")
```

```
> reduite(-1,5,1,-7)
(AB):y= -6.0 x+( -1.0 )
> reduite(1,3,1,-7)
(AB):x =  1
```

Solution :

(AC) : $x = 1$ C'est une droite verticale car les deux points ont la même abscisse.
(AB) : on trouve $m = -1$ et donc $y = -x + 4$
(BC) : on trouve $m = -6$ et donc $y = -6x - 1$

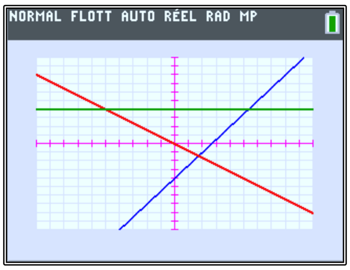
c) Détermination de l'équation réduite d'une droite par lecture graphique

Méthode :

- On détermine l'ordonnée à l'origine si elle est entière.
- En partant de ce point, on cherche à rejoindre sur la droite un autre point à coordonnées entières en comptant les carreaux afin de trouver m.
- Si l'ordonnée à l'origine n'est pas entière, on détermine deux points à coordonnées entières et on utilise la méthode calculatoire ci-dessus.

Exemple :

$$d_1 : y = \frac{3}{2}x - 4$$
$$d_2 : y = \frac{-4}{5}x$$
$$d_3 : y = 4$$



Remarque :

La TI-83 ne sait pas tracer de droites verticales.

d) Droites parallèles

Théorème :
Les droites (d) et (d') ont pour équation respective $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$.
(d) et (d') sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

Exercice de cours :

Soit (d) la droite d'équation $y = 5x - 16$ et le point $A(2;3)$.
Déterminer l'équation réduite de la droite (d') parallèle à (d) et passant par A

Solution :

On sait que (d') sera de la forme $y = 5x + p$.
On remplace par les coordonnées du point A dans l'équation de (d')
On obtient $3 = 5 \times 2 + p$ et donc $p = -7$
On a : $(d') : y = 5x - 7$

e) Condition d'alignement de trois points

Théorème :
Trois points A, B et C du plan sont alignés si et seulement si $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C}$

Remarque :

Cela revient à dire que les droites (AB) et (AC)ont le même coefficient directeur ; elles sont donc parallèles avec un point en commun donc sont confondues.
Les trois points sont donc alignés.

Application :

Les trois points suivants sont- ils alignés ? On donne $A(2;1)$, $B(4;2)$et $C(-2;-1)$

Solution : On évalue séparément les deux rapports :

$\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{2-1}{4-2}=\frac{1}{2}$ puis $\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{-1-1}{-2-2}=\frac{1}{2}$ On a donc l'alignement des trois points.

```python
from fractions import Fraction

def alignes(x_A,y_A,x_B,y_B,x_C,y_C):
    if (y_B-y_A)/(x_B-x_A)==(y_C-y_A)/(x_C-x_A):
        resultat = "les points sont alignés"
    else:
        resultat = "les points ne sont pas alignés"
    return resultat
```

```
> alignes(2,1,4,2,-2,-1)
'les points sont alignés'
```

Remarque :

On aurait pu également déterminer l'équation réduite de la droite (AB) puis vérifier si les coordonnées du point C rendaient l'équation juste.

2) *Équation cartésienne d'une droite*

a) *Vecteur directeur d'une droite*

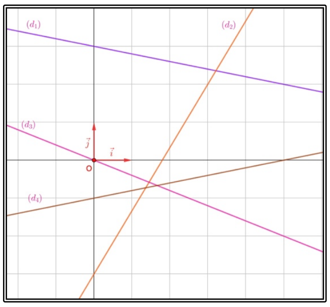
Définition :
Soit une droite (d) et A et B deux pointes distincts de cette droite.
On appelle vecteur directeur de la droite (d) tout vecteur $\vec{u}$ non nul, colinéaire à $\overrightarrow{AB}$

Remarques :

- Un vecteur directeur d'une droite a donc par définition même direction que cette droite
- Pour chaque droite, il existe donc une infinité de vecteur directeur.
- En particulier, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur.
- On choisit souvent comme vecteur directeur le vecteur avec des coordonnées entières les plus petites. On peut donc diviser les coordonnées

Exemple :

Lire sur le graphique ci-contre un vecteur directeur pour chaque droite.



(D_1) admet $\vec{u}(5;-1)$ comme vecteur directeur

(D_2) admet $\vec{u}(3;5)$ comme vecteur directeur

(D_3) admet $\vec{u}(5;-2)$ comme vecteur directeur

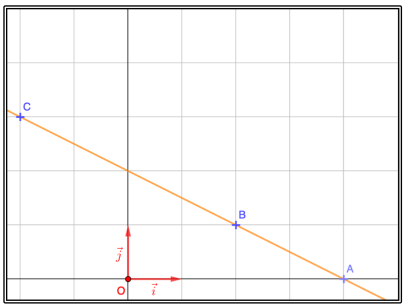
(D_4) admet $\vec{u}(5;1)$ comme vecteur directeur

b) *Équation cartésienne d'une droite*

Exemple introductif :

On donne les points $A(4;0)$ $B(2;1)$ $C(-2;3)$

1) Placer les points dans le repère.
2) Montrer que les points A, B et C sont alignés.
3) Soit $M(x;y)$. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$
4) En déduire une relation caractéristique des points de la droite (AB)



Solution :

1) On évalue les coordonnées des vecteurs. On a alors $\overrightarrow{AB}(-2;1)$ et $\overrightarrow{AC}(-6;3)$
   On remarque que $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$. Les vecteurs sont colinéaires ; les 3 points sont donc alignés.
2) On a alors $\overrightarrow{AM}(x-4;y)$

Dire que le point M est sur la droite (AB) revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

On utilise le déterminant : $1(x-4)+2y=0$. On obtient donc une relation qui caractérise les points M : $x+2y-4=0$

Théorème :
Le plan est rapporté à un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$
(1) Toute droite (d) du plan possède une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$ avec a ou b non nul.
(2) Réciproquement, si a, b et c sont des réels avec $a\neq 0$ ou $b\neq 0$, alors l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que $ax+by+c=0$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b;a)$

Remarque :

Contrairement à l'équation réduite, l'équation cartésienne d'une droite permet de caractériser toutes les droites, qu'elles soient obliques, horizontales ou verticales.

Exercice d'application :

Soit $A(-3;2)$, $B(0;1)$ et $C(2;-2)$ trois points dans un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
Déterminer une équation cartésienne :
I. De la droite(AB).
II. De la parallèle à la droite (AC)passant par B.

Solution :

I. On détermine d'abord les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}(3;-1)$ et $\overrightarrow{AM}(x+3;y-2)$.
M est sur la droite (AB) si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. On utilise le déterminant : $-(x+3)-3(y-2)=0$.
On obtient donc $(AB): x+3y-3=0$.
II. Puisque la droite est parallèle à(AC), le vecteur $\overrightarrow{AC}(5;-4)$ dirige cette droite. On a donc directement $(AC): -4x-5y+c=0$ On remplace par les coordonnées de B afin de trouver la valeur de c. On a finalement $(AC): -4x-5y+5=0$

c) Lien entre vecteur directeur et coefficient directeur

Théorème :
Le plan est rapporté à un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ Soit m un réel.
Une droite (d) du plan a pour coefficient directeur m si et seulement si le vecteur $\vec{u}(1;m)$ est un vecteur directeur de la droite (d)

Remarque :

Si la droite (d)est verticale, son équation cartésienne est de la forme $(d): x=k$. Le vecteur directeur de la droite est $\vec{u}(0;1)$ et la droite n'a pas de coefficient directeur.

Exemple :

Déterminer l'équation réduite de la droite (d) passant par $A(-3;1)$, dirigée par $\vec{u}(2;-1)$.

Solution :
Une équation réduite est de la forme : $(d): y=mx+p$ on a donc ici :$(d): y=-\frac{x}{2}+p$.
On obtient la valeur de p en remplaçant les coordonnées de A. $(d): y=-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$

d) Lien entre équation cartésienne et équation réduite de droite

Théorème :
Le plan est rapporté à un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ Soit m un réel.
Soit (d) une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ avec $a\neq 0$ ou $b\neq 0$
1) Si $b=0$, alors (d) est une droite parallèle à l'axe des ordonnées qui admet une équation réduite de la forme$(d): x=k$. Le vecteur $\vec{\jmath}(0;1)$ est alors directeur de (d)
2) Si $b\neq 0$, alors(d) est une droite non verticale qui admet $(d): y=mx+p$ comme équation réduite où m est le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine.

Exemples :

On donne la droite $(d): y = -\frac{3}{4}x + 7$. Donner une équation cartésienne de (d)

Il suffit pour cela de modifier l'écriture $(d): -\frac{3}{4}x - y + 7 = 0$ On multiplie alors pour faire disparaître la fraction $(d): 3x + 4y - 28 = 0$ on a $\vec{u}(-4; 3)$ comme vecteur directeur

3) Systèmes d'équations

a) Définition

Définition :

On appelle système linéaire de deux équations à deux inconnues, x et y, tout système qui peut s'écrire sous la forme $(S): \begin{cases} ax + by = -c & (1) \\ a'x + b'y = -c' & (2) \end{cases}$ où a, b, c, a', b' et c'sont des réels donnés.

Résoudre le système (S), c'est chercher tous les couples $(x\,;y)$ éventuels vérifiant à la fois les deux équations (1) et (2).

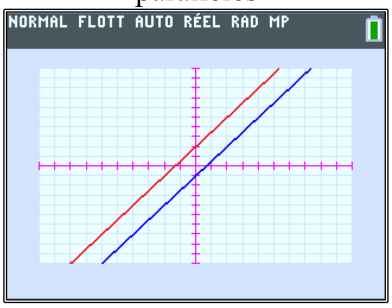
Remarques :

- Deux méthodes de résolution algébriques existent : la méthode par substitution et la méthode par combinaison linéaire. Ces deux méthodes seront traitées plus loin. Cependant, la méthode par substitution est la plus facile à mettre en place, si les conditions le permettent.
- L'intersection en mathématiques se traduit souvent par une accolade.

b) Lien avec les droites

Le système (S) est formé des équations (1) et (2). Ce sont des équations cartésiennes de deux droites (d_1) et (d_2).
Un couple $(x\,;y)$ de nombres est solution de (S)si, et seulement si, le point $M(x\,;y)$ appartient à la fois à (d_1)*et à* (d_2).
Résoudre (S) revient donc à étudier l'intersection des droites (d_1) *et* (d_2).

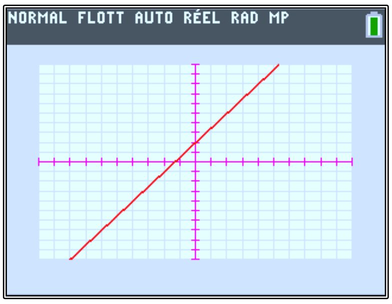
(d_1) et (d_2) sont strictement parallèles



Même coefficient directeur et vecteurs directeurs colinéaires

Le système ne possède aucune solution car les droites n'ont aucun point d'intersection

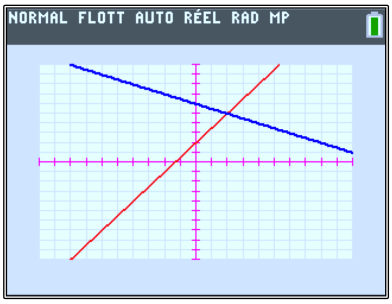
(d_1) et (d_2) sont confondues



Même coefficient directeur et même ordonnée à l'origine

Le système possède une infinité de solution : c'est une droite.

(d_1) et (d_2) sont sécantes



Coefficients directeur différents
Vecteurs directeurs non colinéaires
Le système possède une unique solution : le couple formé par les coordonnées du point d'intersection.

Le lien avec les droites permet donc d'envisager deux types de résolutions :
- Une résolution graphique.
- Une résolution algébrique.

c) ***Résoudre un système***

- ***Le déterminant du système***

Avant d'effectuer une quelconque opération sur le système, on détermine le déterminant du système, déterminant formé par les coefficients du système.

- Si le déterminant est nul, les droites sont parallèles ou confondues.
- Si le déterminant est non nul, il y a un unique point d'intersection.

Exemple :

Résoudre $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$. On évalue $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5$. Il y a un unique point d'intersection.

- ***Méthode graphique***

On trace les droites (d_1) et (d_2) d'équations réduites respectives $(d_1): y = mx + p$ et $(d_2): y = m'x + p'$ le couple solution est alors donné par la lecture des coordonnées du point d'intersection de ces deux droites. $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$

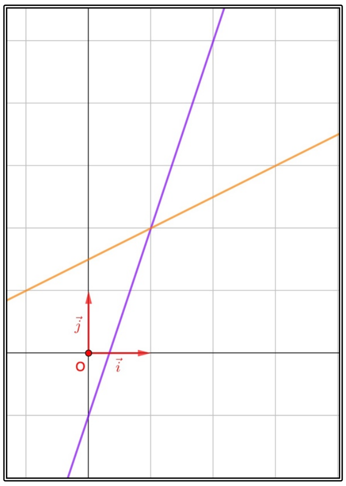
Exemple :

Résoudre : $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$

On transforme le système afin d'obtenir les équations réduites de droites :

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

On trace les droites dans le repère et on extrait par lecture graphique les coordonnées du point d'intersection de ces droites. On obtient : $S = \{(1; 2)\}$



- ***Méthode algébrique***

On utilise toujours la méthode par substitution (isoler puis substituer) lorsqu'un coefficient est unitaire. Sinon, on utilise la méthode par combinaison linéaire.

Exemples : Résoudre les deux systèmes ci-dessous.

Méthode par substitution

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x + 3y = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 - 3x & \Rightarrow Isoler \\ 2x + 3(1 - 3x) = -4 & \Rightarrow Substituer \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 - 3x \\ -7x = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 - 3x \\ x = 1 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} y = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

On a alors : $(1; -2)$ solution du système

On note alors $S = \{(1; -2)\}$

Méthode par combinaison linéaire

$$\begin{cases} 3x - 5y = 11 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

On détermine laquelle des inconnues on souhaite faire disparaitre.

En multipliant les lignes, on a

$$\begin{cases} 6x - 10y = 22 \\ 6x + 9y = 3 \end{cases} \begin{vmatrix} \times 2 \\ \times 3 \end{vmatrix}$$

En soustrayant les deux lignes,

$$\begin{cases} 3x - 5y = 11 \\ 19y = -19 \end{cases} \text{soit} \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

On note alors $S = \{(2; -1)\}$

Remarque :

Quand on trouve la solution d'un système, on peut savoir de manière certaine si la solution trouvée est la bonne ou pas. Un rapide feedback et le tour est joué. On remplace les coordonnées dans les deux équations. Si elles sont vérifiées toutes les deux, c'est la solution du système.

d) Système de Cramer

L'utilisation du déterminant peut permettre de trouver (presque) de tête la solution du système. Cette méthode a été découverte par Gabriel Cramer. Elle est valable pour un système de n équations à n inconnues mais dans le cadre du chapitre, deux équations à deux inconnues suffiront.

Exemple :

Résoudre le système $\begin{cases} 5x + 4y = 6 \\ 3x + 7y = -1 \end{cases}$

On calcule le déterminant du système $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 23$ Il y a une unique solution. On trouve les inconnues en calculant le déterminant formé par les colonnes.

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}$ soit $x = 2$ et $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}$

soit $y = -1$ et donc $S = \{(2; -1)\}$

```python
from math import *
def cramer(a,b,c,d,e,f):
  if a*e-b*d == 0:
    print("pas de solution unique")
  else:
    x = (c*e-b*f)/(a*e-b*d)
    y = (a*f-d*c)/(a*e-b*d)
    print("x=",x,"y=",y)
```

```
> cramer(5,4,6,3,7,-1)
x= 2.0 y= -1.0
```

Remarques :

- On voit bien pourquoi le déterminant du système doit être non nul…
- La TI-83 sait résoudre les systèmes linéaires. Référez-vous à la fiche calculatrice.

e) Droites concourantes

Dans un repère orthonormé, on donne les coordonnées des trois points suivants : $A(1; 5)$, $B(8; 3)$ et $C(3; -2)$. Déterminer alors les coordonnées du centre de gravité du triangle.

Résolution :

Le centre de gravité d'un triangle est le point d'intersection des médianes. Il faut donc trouver les coordonnées des milieux des côtés du triangle :

$I(5{,}5; 0{,}5)$ $J(2; 1{,}5)$ $K(4{,}5; 4)$

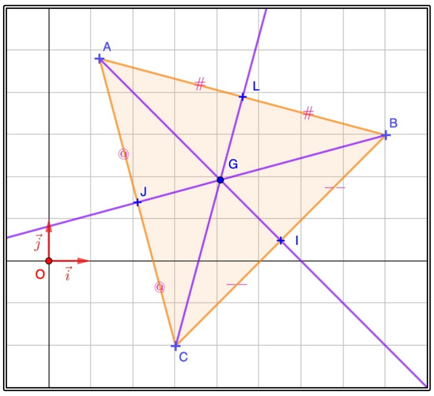
Les équations de droites sont :

$d_1: y = -x + 6$

$d_2: y = \dfrac{1}{4}x + 1$

$d_3: y = 4x - 14$

On trouve $G(4; 2)$



f) Trois équations à trois inconnues

Problème : Résoudre le système suivant : $\begin{cases} x + 4y + 9z = 17 \\ x + 2y + 3z = 5 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

Résolution :

Plusieurs méthodes existent mais la plus efficace, est la méthode de Gauss, qui est une généralisation de la méthode par combinaison linéaire pour aboutir à un système triangulaire.

$\begin{cases} x + 4y + 9z = 17 \\ x + 2y + 3z = 5 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ soit alors $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + 2z = 4 \\ 3y + 8z = 16 \end{cases}$ et donc $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + 2z = 4 \\ 2z = 4 \end{cases}$ alors $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$

On a rendu le système triangulaire en faisant disparaitre les variables une à une.

Finalement, on obtient : $S = \{(-1\,;\ 0;\ 2)\}$