Droites et plans de l'espace

Capacités attendues en fin de chapitre :

- Représenter des combinaisons linéaires de vecteurs donnés.
- Décrire la position relative de deux droites, d'une droite et d'un plan, de deux plans.
- Lire sur une figure si deux vecteurs du plan, trois vecteurs de l'espace forment une base.
- Lire sur une figure la décomposition d'un vecteur dans une base.
- Étudier géométriquement des problèmes simples de configurations de l'espace.
- Déterminer une représentation paramétrique d'une droite, d'un plan.

Le mathématicien du chapitre :

Hermann Grassmann (1809 –1877) est un mathématicien allemand. Il développa en 1844 une nouvelle branche des mathématiques. Il y développe des notions essentielles tels que les barycentres ou les espaces vectoriels. Il explique alors que la géométrie peut être étudiée de manière algébrique. Il introduit alors l'extension du calcul vectoriel du plan à l'espace. C'est tout cela qui va être étudié ici.

1) *Vecteurs de l'espace*

a) *Définition d'un vecteur de l'espace*

Définition :

Soient A et B deux points de l'espace. On associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$ à la transformation qui transforme A en B.

Remarque :

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si $ABDC$ est un parallélogramme.

Théorème :

Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur. Il existe un unique point M de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$. On dit que $\overrightarrow{AM}$ est un représentant de $\vec{u}$ d'origine A.

Remarque :

Le vocabulaire et les notations établies pour les vecteurs du plan s'appliquent à l'espace.

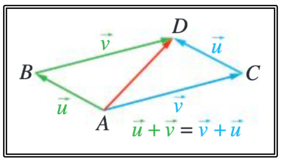
Cas particuliers.

- Le vecteur ***nul*** est noté $\vec{0}$: pour tout point M, $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$. Il n'a ni direction, ni sens et sa norme vaut 0.
- Le vecteur ***opposé*** à $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur qui a la même direction, la même norme que $\overrightarrow{AB}$ mais un sens contraire (ou opposé) C'est donc le vecteur $\overrightarrow{BA}$. On note alors: $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$

b) *Opérations sur les vecteurs*

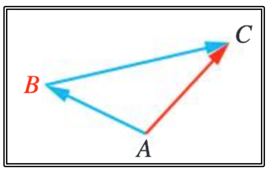
Théorème :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BD}$
La somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, est le vecteur noté $\vec{u} + \vec{v}$, de représentant $\overrightarrow{AD}$ ou D est le point tel que $ABDC$ soit un parallélogramme



Théorème :

Soient trois points A, B et C de l'espace. On a la relation de Chasles dans l'espace : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

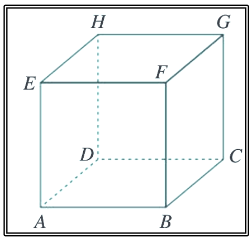


Définition :

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un réel non nul. Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur qui a :

- La même direction que $\vec{u}$
- Le même sens que $\vec{u}$ si k est positif et le sens contraire si k est négatif.
- Pour norme $|k| \times \|\vec{u}\|$

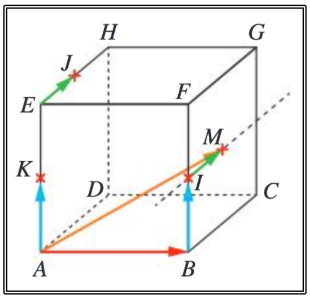
Exercice :



On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-contre.
Construire les points M et N tels que :

- $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EH}$
- $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{HE}$

Solution:



- On note I le milieu de $[BF]$ et J le milieu de $[EH]$. On a alors : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EJ}$
  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{EJ}$
- $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{HE}$
  $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GF}$
  Donc $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AF}$ et N est confondu avec F.

Théorème :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Deux vecteurs sont colinéaires s'il existe un réel k non nul tel que $\vec{u} = k\vec{v}$

Exemple :

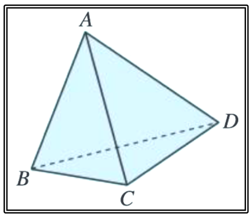
Sur le cube précédent, on a les différentes égalités vectorielles :

- $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BI}$. Les vecteurs sont colinéaires donc les points sont alignés.
- $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DC}$. Les vecteurs sont colinéaires.

Remarque :

Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement s'ils ont la même direction.

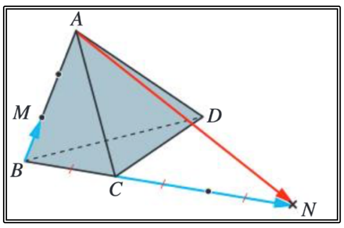
Exercice :



On considère le tétraèdre $ABCD$ ci-contre.

- Construire les points M et N tels que :
  $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{BC}$
- Démontrer que $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires

Solution:



- On utilise la relation de Chasles. On a alors :
  $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$
  $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$
  $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{BC}$
  $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{MC}$
  Donc $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires

Remarque :

La colinéarité sert à prouver le parallélisme de droite ou l'alignement de points de l'espace sur le même modèle que les exercices de première et de seconde.

2) Droites et plans de l'espace

a) Caractérisation vectorielle d'une droite

La colinéarité, vue dans le plan en seconde et prolongée ci-dessus, permet de caractériser un ensemble de points.

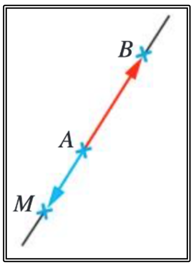
Définition :

Soient A et B deux points distincts de l'espace. La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ avec $k \in \mathbb{R}$

Remarque:

On dit que $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB). Pour déterminer une droite de manière unique, un point et un vecteur directeur suffisent.

Rappelons quand même que le vecteur directeur n'est pas unique. $2\overrightarrow{AB}$ est aussi un vecteur directeur de (AB).
Nous verrons plus loin une nouvelle manière de caractériser une droite après les équations réduites et cartésiennes.



b) Caractérisation vectorielle d'un plan

Définition :

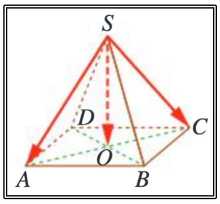
Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs distincts de l'espace avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.
$\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires s'il existe deux réels α et β tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$
On dit que $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Remarque :

L'écriture de cette décomposition est unique.

Exemple :

On prend une pyramide à base carrée $SABCD$. On note O le milieu de la base. Avec l'identité du parallélogramme, on a: $\overrightarrow{SO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$
Les vecteurs sont donc coplanaires. Ils appartiennent au plan vertical.



Définition :

On dit que 4 points A, B, C et D sont coplanaires s'il existe un plan qui contient ces points.

Remarque :

Sur la pyramide ci-dessus, A, B, C et D sont coplanaires et ils appartiennent au plan horizontal.

Définition :

Soient A, B et C trois points non alignés. Le plan (ABC) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ avec α et β deux réels.
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont appelés vecteurs directeurs du plan. On dit que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est une base du plan (ABC) et que $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est un repère du plan.

Remarque :

- Un plan est donc déterminé de manière unique par la donnée d'un point et de deux vecteurs non colinéaires de l'espace.
- Trois points de l'espace sont toujours coplanaires.
- Cette définition d'un plan par deux vecteurs directeurs sera prolongée plus loin par l'équation paramétrique d'un plan.

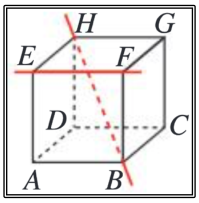
3) Position relative de droites et de plan

a) Position relative de deux droites

Jusqu'à présent, dans le plan, deux droites étaient soit parallèles, soit sécantes. Dans l'espace, une troisième voie s'ouvre.

Sur le cube $ABCDEFGH$ ci-contre :

- (EF) et (HG) sont parallèles.
- (EF) et (EH) sont sécantes.
- Que dire de (EF) et (HB). Elles ne sont pas parallèles car les vecteurs qui les portent ne sont pas colinéaires. Elles ne sont pas sécantes.



Définition :

Soient (d) et (d') deux droites de l'espace de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

- (d) et (d') sont parallèles si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- (d) et (d') sont sécantes si elles sont dans le même plan et si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires
- (d) et (d') sont non coplanaires sinon.

Remarque :

Des droites sont coplanaires si et seulement si elles sont parallèles ou sécantes.

Exercice :

Avec le cube ci-dessus, indiquer par un mot la position des droites de l'espace.

- (EA) et (CG) sont parallèles.
- (EF) et (ED) sont sécantes.
- (ED) et (HB) sont non coplanaires.
- (BF) et (HG) sont non coplanaires.
- (AB) et (HG) sont parallèles.
- (AG) et (HG) sont sécantes.

b) Position relative d'une droite et d'un plan

Définition :

Une droite est parallèle à un plan lorsqu'elle admet un vecteur directeur colinéaire à un vecteur directeur du plan.

Exercice :

On reprend le cube ci-dessus. Donner la position relative de la droite et du plan.

- (EA) est inclue dans (EHA)
- (EA) est parallèle à (FHB)
- (HG) est sécante à (FBC)
- (ED) est parallèle à (FBC)

Propriété :

Si une droite n'est pas parallèle à un plan, alors elle admet un unique point d'intersection avec ce plan.

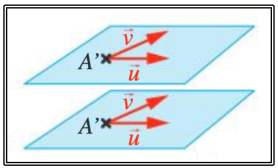
Exemple :

Avec le cube ci-dessus, (HB) et (EAC) sont sécants en un point O appelé centre du cube.

c) Position relative de deux plans

Définition :

Deux plans sont parallèles lorsqu'ils admettent un même couple de vecteur directeur non colinéaires.
Alors, tout plan sécant à l'un sera sécant à l'autre.



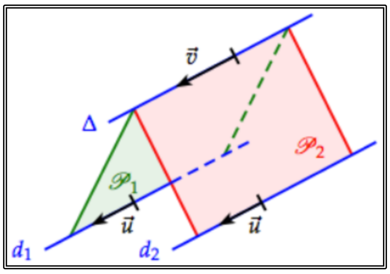
Propriété :

Si deux plans ne sont pas parallèles, alors leur intersection est une droite

Théorème :

Soient (d_1) et (d_2) deux droites parallèles contenues dans les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$.
Si ces deux plans sont sécants en une droite (Δ), alors elle est parallèle à (d_1) et(d_2)

Démonstration :

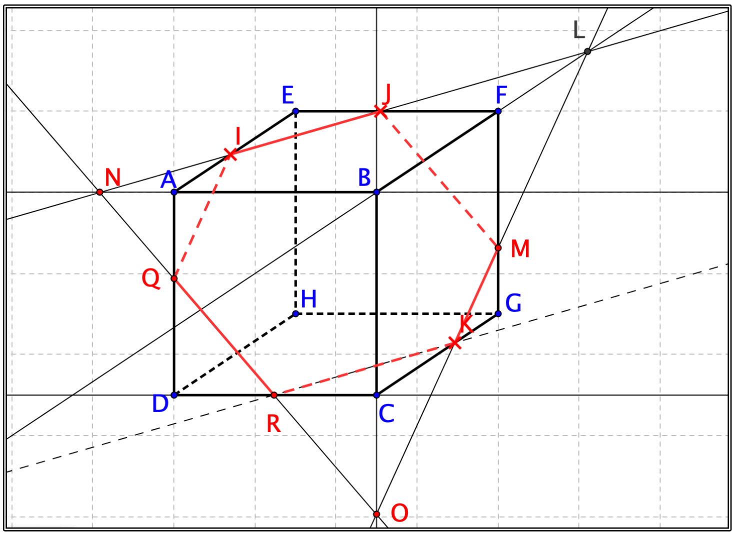


On va raisonner par l'absurde.
On considère donc que (Δ) n'est pas parallèle à (d_1) ce qui entraine que (Δ) n'est pas non plus parallèle à (d_2)
On appelle alors $\vec{v}$ un vecteur directeur de la droite (Δ)
Puisque (d_1) et (d_2) sont parallèles, on appelle alors $\vec{u}$ leur vecteur directeur

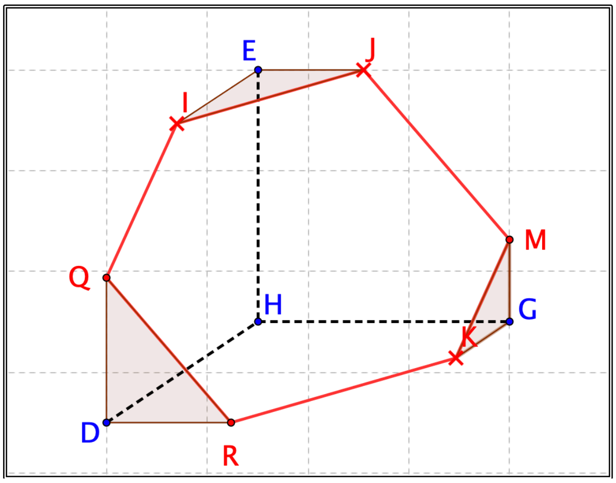
Comme (Δ) n'est pas parallèle à(d_1), $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Puisque (Δ) est contenue dans$(\mathcal{P}_1)$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs du plan $(\mathcal{P}_1)$.
Comme (Δ) est aussi contenue dans $(\mathcal{P}_2)$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$sont des vecteurs directeurs du plan $(\mathcal{P}_2)$
On peut donc en déduire que les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont parallèles ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle les deux plans étaient sécants.
(Δ) est donc parallèle à (d_1) et (d_2). C'est le théorème du toit.

d) __Section d'un cube par un plan__

On donne le cube *ABCDEFGH* ci -dessous et les points *I, J* et *K* placés sur les arêtes. Tracer la section du cube par le plan (IJK). Pour cela, on construira des points sur les fuyantes.



On construit ci-dessous ce qu'il reste du cube après le passage de la machette.



La section est ici un hexagone non régulier.

4) Repères dans l'espace

a) Base de l'espace

Définition :

Une base de l'espace est formée d'un triplet de vecteurs $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ non coplanaires

Exemple :
Sur le cube de la page précédente, $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DG}, \overrightarrow{DF})$ forme une base de l'espace. Les vecteurs sont tous non nuls et deux à deux non colinéaires. Il n'est pas nécessaire que les vecteurs soient orthogonaux pour former une base.

Propriété :

Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base de l'espace. Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ tels que $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$. $(x; y; z)$ sont les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Exercice :

Dans la base $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DG}, \overrightarrow{DF})$, donner les coordonnées des vecteurs ci-dessous.

- $\overrightarrow{DC}(1\,;0\,;0)$
- $\overrightarrow{FA}(0\,;-1\,;0)$
- $\overrightarrow{GF}(0\,;-1\,;1)$
- $\overrightarrow{FH}(-1\,;1\,;-1)$

b) Repère de l'espace

Définition :

Un repère de l'espace est la donnée d'un point origine O et de trois vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, et $\vec{k}$ non coplanaires. Ce repère est noté $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Remarque :

L'origine a une importance fondamentale dans la donnée des coordonnées des points

Définition :

Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère de l'espace.
Pour tout M du plan, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.
$(x; y; z)$ sont les coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

Vocabulaire :

x est appelé l'abscisse $\quad$ y est appelé l'ordonnée $\quad$ z est appelé la cote.

Remarque :

On étudiera la partie où les vecteurs sont orthogonaux au deuxième chapitre de géométrie dans l'espace. Le produit scalaire dans l'espace est indispensable dans ce cas.

Exemple :

Dans le repère $(D, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DG}, \overrightarrow{DF})$, donner les coordonnées des points ci-dessous.

- $D(0\,;0\,;0)$
- $C(1\,;0\,;0)$
- $H(-1\,;1\,;0)$
- $B(1\,;-1\,;1)$
- $A(0\,;-1\,;1)$
- $E(-1\,;0\,;1)$

K est sur la face $(DCGH)$ donc a une cote nulle.

Remarque :

On voit bien avec cet exemple que le choix du repère est fondamental. Avec un repère bien choisi, on se facilite les calculs. Par exemple $(D, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{DA})$

c) *Formules algébriques*

La plupart des notions valables dans le plan sont toujours valables dans l'espace et on retrouve des formules similaires. On donne un repère de l'espace $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$
Soient $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points de l'espace :

- ***Coordonnées de*** $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$ « extrémité moins origine »
- ***Coordonnées du milieu I de***$[AB]$: $I\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}; \frac{z_A+z_B}{2}\right)$ « demi-somme»
- S'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires.

Remarque :

N'oubliez pas d'écrire les points en colonne dans la marge pour les calculs de base.

```python
def colineaires(Xu,Yu,Zu,Xv,Yv,Zv):
    L = [Xu,Yu,Zu]
    T = [Xv,Yv,Zv]
    u = L[0]/T[0]
    r = L[1]/T[1]
    s = L[2]/T[2]
    if u == r and u == s:
        resultat = "vecteurs colinéaires"
    else:
        resultat = "vecteurs non colinéaires"
    return resultat
```

On peut tester la colinéarité de vecteur de l'espace avec un code en python simple utilisant un test et des listes.

```
> colineaires(1,2,3,4,5,6)
'vecteurs non colinéaires'
> colineaires(-2,5,6,4,-10,-12)
'vecteurs colinéaires'
```

5) *Équations paramétriques de droites et de plans*

L'espace est rapporté à un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

a) *Le cas de la droite*

Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul.
La droite (D) passant par A et admettant $\vec{u}$ pour vecteur directeur est l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires. On la note $\mathcal{D}(A; \vec{u})$

Propriété et définition

$\mathcal{D}(A; \vec{u})$ est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que :

$$\mathcal{D}(A; \vec{u}): \begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ avec } \vec{u}(\alpha; \beta; \gamma)$$

Le système ci-dessus est une ***représentation paramétrique*** de la droite $\mathcal{D}(A; \vec{u})$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On dit que t est ***le paramètre.***

Remarques :

- Pour une même droite, il existe une infinité de représentations paramétriques puisque la droite possède une infinité de points.
- Le paramètre est une variable muette. On utilise fréquemment les lettres t ou k. Lors d'exercice traitant de plusieurs droites, on prendra une lettre différente par droite.
- On évitera l'utilisation du paramètre t' car le ' peut se perdre facilement lors de calcul algébrique long et fastidieux.
- Dans l'espace, une droite ne peut pas s'écrire sous la forme d'une équation cartésienne.

Démonstration

Puisque $M(x; y; z)$ est sur la droite $\mathcal{D}(A; \vec{u})$, on a donc les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ colinéaires ; ceci se traduit par l'existence d'un nombre $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$. On traduit alors cette égalité sur les trois coordonnées des vecteurs :

$$\begin{cases} x - x_A = \alpha t \\ y - y_A = \beta t \\ z - z_A = \gamma t \end{cases} \text{ Soit en isolant } \mathcal{D}(A; \vec{u}): \begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Exercice 1:
Donner une représentation paramétrique de la droite passant par les points $A(-1;2;-3)$ et $B(1;-1;3)$. Le point $C(1;2;3)$ appartient-il à la droite (AB) ?

Solution :
On détermine les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite, ici $\overrightarrow{AB}(2;-3;6)$. On peut alors utiliser le point A ou le point B pour écrire une équation paramétrique de (AB).

Avec A : $\mathcal{D}(A;\vec{u})$: $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2-3t \\ z=-3+6t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ Ou avec B : $\mathcal{D}(B;\vec{u})$: $\begin{cases} x=1+2k \\ y=-1-3k \\ z=3+6k \end{cases}, k\in\mathbb{R}$

Ces deux représentations paramétriques représentent la même droite.
Pour déterminer si C est sur la droite (AB), on résout trois équations en t et on vérifie la compatibilité du système $\begin{cases} 1=-1+2t \\ 2=2-3t \\ 3=-3+6t \end{cases}$ soit $\begin{cases} 1=t \\ 0=t \\ 1=t \end{cases}$ Le système est donc incompatible. On conclut donc que le point C n'est pas sur la droite (AB).

Cas particuliers :
A et B sont deux points distincts de l'espace et on note $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$. L'appartenance d'un point M au segment $[AB]$ ou bien à la demi-droite $[AB)$ s'obtient en adaptant l'énoncé de la conclusion ci-dessus :
• ***Pour le segment***, il suffit de remplacer dans le système $t\in\mathbb{R}$ par $t\in[0;1]$
• ***Pour la demi-droite [AB),*** il suffit de remplacer dans le système $t\in\mathbb{R}$ par $t\in[0;+\infty[$

b) Intersection de droites de l'espace

Exercice 1 :
Considérons les droites : $(\mathcal{D})$: $\begin{cases} x=1+t \\ y=-3+2t \\ z=2-t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ et $(\mathcal{D}')$: $\begin{cases} x=2+3k \\ y=-1-k \\ z=1+k \end{cases}, k\in\mathbb{R}$

Étudier l'intersection des deux droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$, si elle existe.

Solution :
On exhibe un vecteur directeur de chaque droite afin de vérifier leur colinéarité. On a donc : $\vec{u}(1;2;-1)$ et $\vec{v}(3;-1;1)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Les deux droites sont donc sécantes ou non coplanaires. On résout donc le système afin de déterminer l'intersection.
$\begin{cases} 2+3k=1+t \\ -1-k=-3+2t \\ 1+k=2-t \end{cases}$, système de trois équations à 2 inconnues. On isole une inconnue et on remplace dans les 2 équations : $\begin{cases} 2+3(1-t)=1+t \\ -1-(1-t)=-3+2t \\ k=1-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=1 \\ k=0 \end{cases}$. Le système est donc compatible. Les droites sont sécantes en un point $A(2;-1;1)$

Exercice 2 :
Démontrer que les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ ne sont pas coplanaires :
$(\mathcal{D})$: $\begin{cases} x=-2t \\ y=-3+t \\ z=5 \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ et $(\mathcal{D}')$: $\begin{cases} x=1-3k \\ y=-2+2k \\ z=3-k \end{cases}, k\in\mathbb{R}$

Solution :
On exhibe un vecteur directeur de chaque droite afin de vérifier leur colinéarité. On a donc : $\vec{u}(-2;1;0)$ et $\vec{v}(-3;2;-1)$. Ces deux vecteurs ne peuvent pas être colinéaires.
Les deux droites sont donc sécantes ou non coplanaires. On résout donc le système :

$$\begin{cases} -2t=1-3k \\ -3+t=-2+2k \\ 5=3-k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-3{,}5 \\ t=-3 \\ k=-2 \end{cases}$$

Les équations sont incompatibles. Les droites n'ont pas de point d'intersection et ne sont pas parallèles : elles sont donc non coplanaires.

c) Le cas du plan

Nous avons plus haut la caractérisation vectorielle du plan. Le plan (ABC) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + k\vec{v}$ avec t et k deux réels où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dirigent (ABC)
En utilisant les coordonnées des points et des vecteurs dans le repère, on obtient.

$\begin{cases} x - x_A = \alpha t + \alpha' k \\ y - y_A = \beta t + \beta' k \\ z - z_A = \gamma t + \gamma' k \end{cases}$ où $\vec{u}(\alpha;\beta;\gamma)$ et $\vec{v}(\alpha';\beta';\gamma')$ et t et k des réels.

On a donc : $\mathcal{P}(A;\vec{u};\vec{v}) : \begin{cases} x = x_A + \alpha t + \alpha' k \\ y = y_A + \beta t + \beta' k \\ z = z_A + \gamma t + \gamma' k \end{cases}, t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}$

Exemple :

On donne le point $A(2;1;-3)$ et les vecteurs $\vec{u}(-1;2;-3)$ et $\vec{v}(1;-1;1)$
Déterminer une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}(A;\vec{u};\vec{v})$

Solution :

On vérifie d'abord que les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, ce qui n'est pas le cas en regardant les deux premières coordonnées de chaque vecteur.
On a donc simplement l'équation paramétrique du plan :

$\mathcal{P}(A;\vec{u};\vec{v}) : \begin{cases} x = 2 - t + k \\ y = 1 + 2t - k \\ z = -3 - 3t + k \end{cases}, t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}$

d) Intersection d'une droite et d'un plan

On souhaite déterminer l'intersection de la droite $\mathcal{D}(A;\vec{u}) : \begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = 6 - 1t \\ z = 1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et du plan de l'espace $\mathcal{P}(B;\vec{w};\vec{v}) : \begin{cases} x = -2 + l + 2k \\ y = 3 + 3l - k \\ z = -3 - 2l + 5k \end{cases}, l \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}$. Pour cela, il faut résoudre le système : $\begin{cases} -3 + 3t = -2 + l + 2k \\ 6 - 1t = 3 + 3l - k \\ 1 + 2t = -3 - 2l + 5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l + 2k - 3t = -1 \\ 3l - k + t = 3 \\ -2l + 5k - 2t = 4 \end{cases}$.

Les élèves qui ont suivis maths expertes savent résoudre ce système à la main. Pour les autres, on peut tester les solutions entières avec Python pour déterminer, si elle existe, la solution du système pour les valeurs entre 1 et 9.

```python
def intersection():
    for l in range (10):
        for k in range(10):
            for t in range(10):
                m = l+2*k-3*t
                n = 3*l-k+t
                p = -2*l+5*k-2*t
                if m == -1 and n == 3 and p == 4:
                    parametre =[l,k,t]
    return parametre
```

```
> intersection()
[1, 2, 2]
```

La solution obtenue n'est pas les coordonnées du point d'intersection mais les valeurs des paramètres. Il faut remplacer pour obtenir le point d'intersection :

$I(3;4;5)$