Dérivation

Compétences attendues en fin de chapitre :

- Calculer un taux de variation
- Interpréter le nombre dérivé en physique, en économie.
- Déterminer graphiquement un nombre dérivé, calculer un nombre dérivé.
- Déterminer l'équation de la tangente en un point à la courbe représentative d'une fonction.
- Calculer une fonction dérivée en utilisant les propriétés des opérations élémentaires.

Le mathématicien du chapitre :

Au 17ème siècle, grâce à l'émergence de la géométrie analytique, l'étude des courbes rejoint ce que nous appelons aujourd'hui l'étude des fonctions. Isaac Newton et Gottfried Leibniz, pour résoudre entre-autre des problèmes de tangentes à une courbe développent séparément d'une théorie basée sur des infiniment petits.

Dans tout le chapitre, le plan sera rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$

I. Nombre dérivé

a) Coefficient directeur d'une droite

On rappelle ci-dessous les compétences acquises en seconde sur le coefficient directeur.

Définition :

Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points du plan. Le coefficient directeur de la droite (AB) est donné par : $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

Remarques :

- Il est inutile de placer les points dans un repère pour calculer le coefficient directeur d'une droite.
- Par contre, si la droite est tracée, on peut déterminer graphiquement le coefficient directeur de la droite formée par deux points.
- Le coefficient directeur est donc un rapport : « celui de l'écart des *y* sur l'écart des *x* ».

  Il vérifie : $m=\frac{\Delta_y}{\Delta_x}=\frac{\uparrow}{\rightarrow}=\frac{monter}{avancer}$
- Le coefficient directeur n'a donc pas d'unité.

Exemple 1 : Par le calcul

On donne les points $A(1;-3)$ et $B(5;8)$

On évalue alors le coefficient directeur : $m=\frac{8-(-3)}{5-1}$ soit donc $m=\frac{11}{4}$

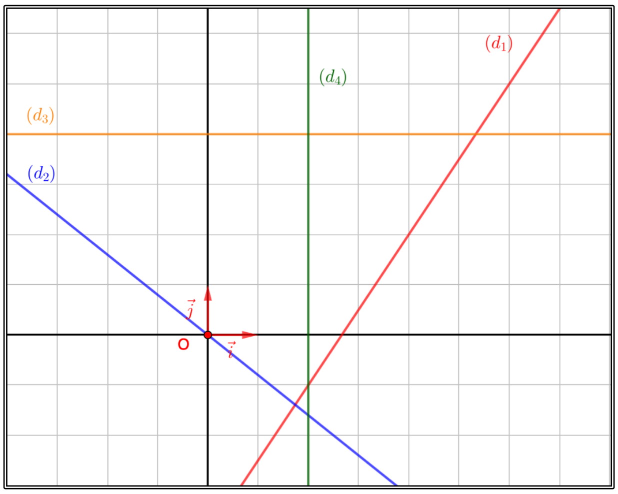
Remarque :

Le coefficient directeur est aussi appelé pente. C'est un nombre réel, positif ou négatif. Si le nombre est positif, la droite « monte », si la pente est négative, la droite « descend ».
Une droite verticale n'a pas de pente, ou plutôt une pente infinie…

En physique, le coefficient directeur est noté $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, variation de la position en fonction du temps. C'est la notion de vitesse moyenne enseignée au collège.

<u>Exemple 2 : Par lecture graphique</u>

Déterminer par lecture graphique les coefficient directeur des droites tracées ci-contre.



<u>Solution :</u>

$$m_1 = \frac{3}{2}$$

$$m_2 = \frac{-4}{5}$$

$$m_3 = 0$$

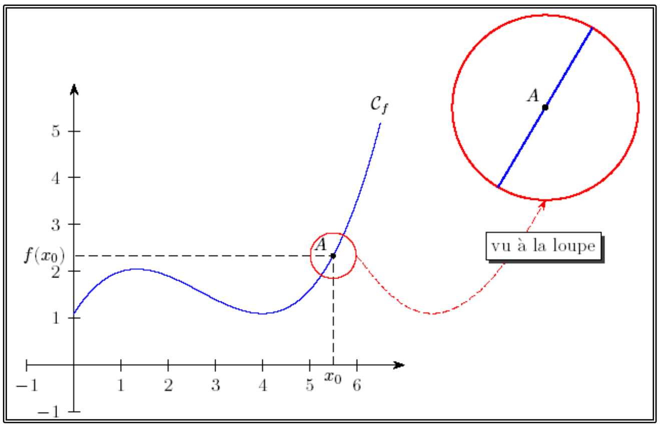
<u>Remarque :</u>

On se rend compte qu'il y a un problème pour la droite (d_4) la division par 0 étant impossible. Cette droite verticale n'a donc pas de coefficient directeur. Nous verrons plus loin le lien avec la dérivabilité.

b) <u>Aspect graphique</u>

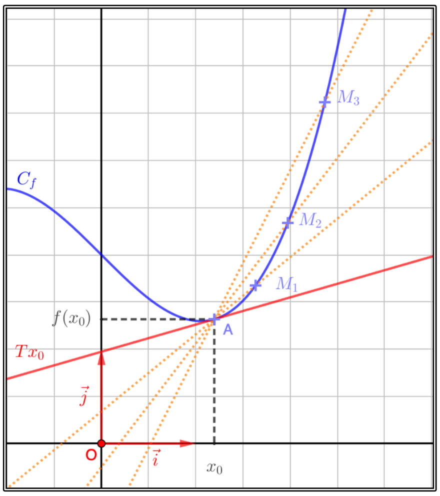
Soit f une fonction définie sur D_f et x_0 un point de D_f . On note alors $A(x_0, f(x_0))$ le point de la représentation graphique de f d'abscisse x_0. On note enfin un nombre réel h tel $x_0 + h \in D_f$

Lorsqu'on regarde dans une zone très proche de A (appelé voisinage de A), la courbe a l'aspect d'une droite. Il est donc naturel de connaître le coefficient directeur de cet droite et par la suite son équation.



Soit M un point de C_f d'abscisse $x_0 + h$, on a donc $M(x_0 + h, f(x_0 + h))$
Ainsi, la droite (AM) a pour coefficient directeur le nombre $m = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Si l'on souhaite que M se rapproche de A, il faut que h se rapproche de 0.
On regarde donc vers quel nombre tend le quotient lorsque h tend vers 0.
A la limite de la position de M près de A, on aura donc le dessin ci-contre. La droite tracée est donc en position tangente par rapport à la courbe au point d'abscisse x_0



Définition :

On appelle taux d'accroissement de f en x_0 le nombre $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

c) *Nombre dérivé et notion de dérivabilité*

Définition :

On dit que f est dérivable en x_0 lorsque le nombre $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ tend vers un nombre réel lorsque h tend vers 0. Ce nombre limite est appelé nombre dérivé de f en x_0

On note alors $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

La dérivabilité est donc une notion locale, c'est à dire différente pour chaque point du domaine.

Remarque :

La notation $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ n'est plus exigible en classe de première puisque le chapitre sur les limites de fonctions a disparu des programmes de première mais sera étudié en Terminale.

Exemple 1 : avec une fonction du second degré

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 5x - 1$

Étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 3$

Solution :

On évalue d'abord :

$f(3) = 23$ puis $f(3+h) = (3+h)^2 + 5(3+h) - 1$ soit $f(3+h) = h^2 + 11h + 23$

On évalue ensuite l'expression du taux d'accroissement de f en 3.

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{3+h-3} = \frac{h^2+11h+23-23}{h} = h+11$$

Lorsque h tend vers 0, cette quantité tend vers 11. Ce nombre est réel et on peut donc conclure que f est dérivable en 3 et que $f'(3) = 11$

Exemple 2 : avec une fonction racine carrée

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \sqrt{x}$

Étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$

Solution :

On évalue d'abord :

$f(0) = 0$ puis $f(0+h) = \sqrt{0+h}$ soit $f(0+h) = \sqrt{h}$

On évalue ensuite l'expression du taux d'accroissement de f en 0.

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{0+h-0} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

Lorsque h tend vers 0, $\frac{1}{\sqrt{h}}$ devient indéfiniment grand. La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0. On montrera de manière analogue qu'elle est dérivable pour n'importe quel nombre réel strictement positif.

Exemple 3 : avec une fonction homographique

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-3\}$ par : $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$

Étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$

Solution :

On évalue d'abord : $f(1) = \frac{1}{4}$ puis $f(1+h) = \frac{1+2h}{4+h}$

On évalue ensuite l'expression du taux d'accroissement de f en 1.

$\frac{f(1+h)-f(1)}{1+h-1} = \frac{\frac{1+2h}{4+h}-\frac{1}{4}}{h}$ Ce taux d'accroissement se simplifie alors en réduisant au même dénominateur : $\frac{f(1+h)-f(1)}{1+h-1} = \frac{\frac{7h}{4(4+h)}}{h}$ soit alors $\frac{f(1+h)-f(1)}{1+h-1} = \frac{7}{4(4+h)}$

Lorsque h tend vers 0, le taux d'accroissement tend vers $\frac{7}{16}$. On a donc que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = \frac{7}{16}$

d) Lecture graphique d'un nombre dérivé

Lorsque la représentation graphique d'une courbe et quelques tangentes sont tracées, on peut être amené à lire les différents nombres dérivés.
Il suffit alors d'appliquer la méthode de seconde et de lire le coefficient directeur de la droite comme rappelé en introduction.

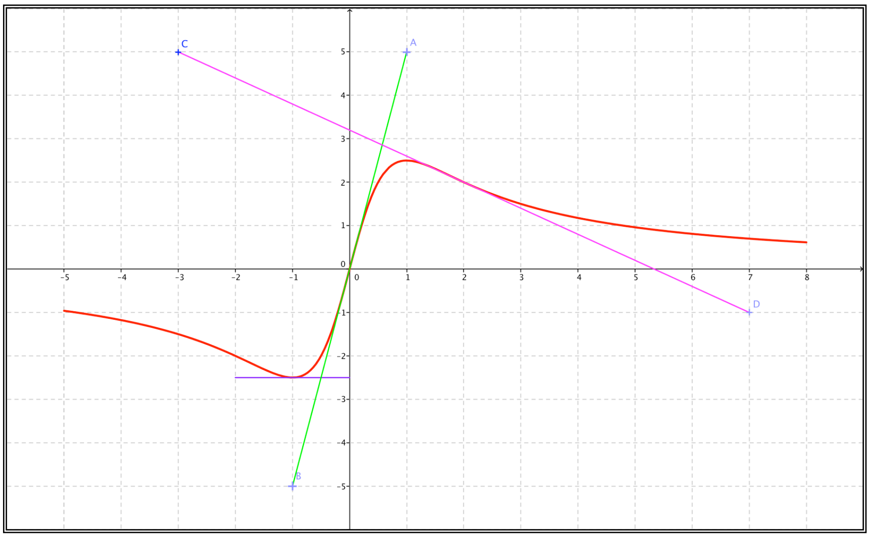
Exercice :

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté une courbe ainsi que quelques tangentes.
Déterminer alors les différents nombres dérivés.

$f'(0) = 5$

$f'(2) = \frac{-3}{5}$

$f'(-1) = 0$



Remarque :

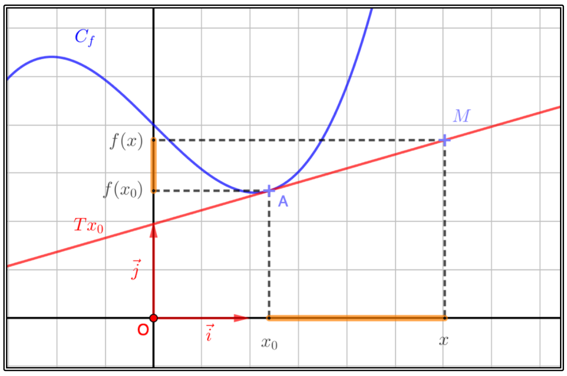
Lorsque la tangente en un point est horizontale, le nombre dérivé en ce point est nul.

II. Equation de la tangente à une courbe en un point

Définition :

La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(x_0)$

Illustration :



Définition :

Soit f une fonction dérivable en un point x_0
La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 a pour équation :

$$T : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Démonstration :

Par définition, la tangente a pour coefficient directeur $f'(x_0)$ donc son équation réduite s'écrit : $y = f'(x_0)x + p$. Le point $A(x_0, f(x_0))$ étant un point de la tangente, ses coordonnées vérifient l'équation réduite soit $f(x_0) = f'(x_0)x_0 + p$. On isole alors p et on remplace sa valeur dans l'équation réduite : $y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$
Soit en factorisant $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Exercice :

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^2 + 7x - 1$
Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x_0 = 2$

Solution :

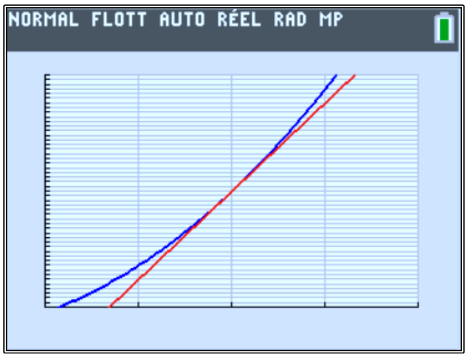
On détermine d'abord le nombre dérivé en 2.
$f(2) = 25$ puis $f(2 + h) = 3(2 + h)^2 + 7(2 + h) - 1$ soit $f(2 + h) = 3h^2 + 19h + 25$
On évalue ensuite l'expression du taux d'accroissement de f en 2.

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{2 + h - 2} = \frac{3h^2 + 19h + 25 - 25}{h} = 3h + 19$$

Lorsque h tend vers 0, cette quantité tend vers 19. Ce nombre est réel et on peut donc conclure que f est dérivable en 2 et que $f'(2) = 19$

On remplace ensuite dans l'équation de la tangente $T_2 : y = f'(2)(x - 2) + f(2)$
Soit ici $T_2 : y = 19x - 13$

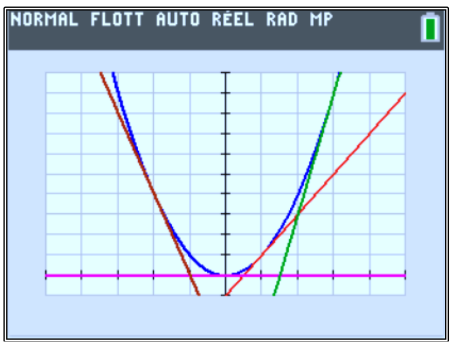
On vérifie toujours que l'équation trouvée est bien celle de la tangente sur la TI-83.
Attention cependant à adapter la fenêtre autour du point de tangence. Aller voir les Fiches TI pour plus de précision.



III. *Fonction dérivée*

a) Déterminer une fonction dérivée

Soit la fonction carrée. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$. En chaque point de sa représentation graphique, la tangente possède un coefficient directeur différent. Il est donc naturel de chercher une expression de ce coefficient directeur en fonction du point de tangence.
Pour cela, nous allons évaluer le taux d'accroissement en $x_0 \in \mathbb{R}$:



$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{h^2 + 2hx_0 + {x_0}^2 - {x_0}^2}{h} = 2x_0 + h$$

Quand h tend vers 0, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $f'(x_0) = 2x_0$
On dit alors que la dérivée de la fonction carrée est : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$

b) Fonction dérivée

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est dérivable sur I lorsque f admet un nombre dérivé pour tout réel x de I, noté $f'(x)$
On appelle fonction dérivée de f sur I, notée f' la fonction définie sur I par $f' : x \mapsto f'(x)$

Exemple :

On souhaite déterminer la fonction dérivée de la fonction racine carrée.
On évalue d'abord l'expression du taux d'accroissement de f en $x_0 \in \mathbb{R}^+$.

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h}$$

Pour simplifier cette expression, on fait intervenir ***l'expression conjuguée*** :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{\left(\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)}{h\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)}$$

soit en simplifiant $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{1}{\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)}$

Quand h tend vers 0, pour x_0 non nul et positif, on obtient $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$

On note donc $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

c) Dérivées de fonctions usuelles

On peut trouver pour chaque fonction l'expression de sa dérivée sur son domaine de définition. On a donc le tableau des dérivées usuelles qui sont à connaître par cœur.

Fonctions f	*Domaine de définition*	*Domaine de dérivabilité*	*Fonctions dérivées*
$f(x) = k$ k *réel*	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax + b$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n$ *avec* $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{-2}{x^3}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ *avec* $n \in \mathbb{N}^*$	$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

d) Opérations sur les fonctions dérivables

Une fonction étudiée à partir de la première n'est jamais une fonction usuelle. C'est pourquoi il faut connaître les propriétés suivantes qui vont permettre de calculer la dérivée de n'importe quelle fonction.

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, ne s'annulant pas sur I pour v.
On a alors :

Fonctions	Dérivées
$u+v$	$u'+v'$
ku	ku'
$u\times v$	$u'v+uv'$
$\frac{1}{v}$	$\frac{-v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{vu'-uv'}{v^2}$

Remarque :

Ci-dessus, k est appelée constante multiplicative.

Démonstration :

On retrouve toutes ces formules en calculant le taux d'accroissement comme précédemment.
Démontrons par exemple la formule pour la somme $u+v$
Soit $x_0 \in I$ et h un réel tel que $x_0+h \in I$, on pose alors $f = u+v$
Alors, le taux d'accroissement de f en x_0 s'écrit :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{(u+v)(x_0+h)-(u+v)(x_0)}{h}$$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h} + \frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}$$

Or u et v sont dérivables en x_0 donc chaque terme de cette somme a une limite réelle lorsque h tend vers 0. Ainsi, le taux d'accroissement de f a une limite finie quand h tend vers 0 qui est donc $u'(x_0)+v'(x_0)$
On a donc que la dérivée d'une somme est la somme des dérivées.

Exemples :

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

- f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^2+7x-1$
  Il s'agit d'une somme, on a directement : $f'(x) = 6x+7$
- f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (5x+3)(7-4x)$
  On pourrait développer l'expression et calculer la dérivée termes à termes.
  f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On a alors :
  $$u(x) = 5x+3 \quad v(x) = 7-4x$$
  $$u'(x) = 5 \quad v'(x) = -4$$
  On a alors $f'(x) = -4(5x+3)+5(7-4x)$
  Soit donc $f'(x) = -40x+23$
- f définie sur $\mathbb{R}-\left\{-\frac{7}{5}\right\}$ par : $f(x) = \frac{(4x+11)}{(7+5x)}$
  On pourrait développer l'expression et calculer la dérivée termes à termes.
  f est dérivable sur $\mathbb{R}-\left\{-\frac{7}{5}\right\}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On a alors :
  $$u(x) = 4x+11 \quad v(x) = 7+5x$$
  $$u'(x) = 4 \quad v'(x) = 5$$
  On a alors $f'(x) = \frac{4(7+5x)-5(4x+11)}{(7+5x)^2}$ Soit donc $f'(x) = \frac{-27}{(7+5x)^2}$

  Remarque :

  La présentation ci-dessus est indispensable afin de ne pas se tromper dans l'application de la formule. Écrire $u = 4x+11$ n'a aucun sens mathématique.